

## تقریری معناشناختی از صدق جمله‌های علوم قیاسی

### با تأکید بر آراء تارسکی

مهدی بهنیا<sup>۱</sup>

علی اکبر احمدی افرمجان<sup>۲</sup>

#### چکیده

نظریه‌ی «صدق» مطرح شده از سوی آلفرد تارسکی، نظریه‌ای است مبتنی بر مفهوم کلاسیک مطابقت که با تکیه بر دانش معناشناسی شکل گرفته است و همین محمل معناشناختی است که پروژه‌ی صدق‌نگاری تارسکی را نسبت به سایر تلاش‌های صدق‌پژوهانه‌ی پیش از او متمایز ساخته است. از طرفی یکی دیگر از مهمترین مواضعی که تارسکی به آن پرداخته است، «علوم قیاسی» است که شامل دستگاه‌هایی است که بر اساس اصول موضوع، مفاهیم اولیه و همین‌طور قواعد تبدیل مشخصی شکل می‌گیرند. در این مقاله بر پایه‌ی دو سویی‌ی اصلی مندرج در عنوان آن، یعنی نظریه‌ی صدق تارسکی و همین‌طور تقریر او از علوم قیاسی، ابتدا به این مطلب می‌پردازیم که اساساً آیا می‌توان پرسش از صدق جملات دستگاه‌های علمی قیاسی مانند ریاضیات و منطق را پرسشی معنادار و قابل طرح به حساب آورد یا خیر؟ سپس ضمن طرح پاسخی مثبت برای این پرسش از درون اندیشه‌های معناشناسانه‌ی تارسکی، راه‌هایی را برای دستیابی به تعریفی از صدق جملات علوم و نظریه‌های قیاسی خواهیم آزمود که یکی از مهمترین آنها که در حقیقت رویکرد مختار این مقاله هم هست، مبتنی بر تعریف خود تارسکی از مفهوم «نتیجه‌ی منطقی» و در دل آن، مفهوم «مدل» است و لذا با رویکرد معناشناختی او هم موافقت دارد. این تقریر پیشنهادی و فراگیر ما در مقابل تقریر برهان محور و نحو‌شناسانه‌ای قرار دارد که هم مخالف مواضع معناشناسانه‌ی تارسکی است، هم اینکه الزاماً تمام قضایای شکل گرفته در دستگاه‌های قیاسی را شامل نمی‌شود. در پایان هم ضمن برشمردن ویژگی‌های مثبت تعریف پیشنهادی خود برای صدق جملات علوم قیاسی، برخی از نقدهای مقدر و در عین حال غیر بنیادی وارد بر آن را برمی‌شمایم.

#### کلید واژه‌ها

تارسکی، صدق، مطابقت، علوم قیاسی، اصل موضوع، معناشناسی، نتیجه‌ی منطقی، مدل، برهان.

<sup>۱</sup> دانش آموخته‌ی دکتری فلسفه دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات.

<sup>۲</sup> استادیار گروه فلسفه‌ی دانشکده‌ی علوم انسانی دانشگاه علامه طباطبائی.

## مقدمه

یکی از مسائل پیش روی نظریه‌ی مطابقت<sup>۱</sup> و معناشنایی<sup>۲</sup> صدق<sup>۳</sup> تارسکی<sup>۴</sup>، این پرسش کلیدی است که نظریه‌ی وی تا چه حد می‌تواند ما را در احراز صدق و کذب گزاره‌های خاص یک علم یا نظریه، مثلاً نظریه‌ها و علوم قیاسی<sup>۵</sup>، اعم از ریاضیات و منطق، یاری رساند. این پرسش را می‌توان به پرسش دیگری هم افزود مبنی بر اینکه آیا می‌توان از نظریه‌ی صدق تارسکی انتظار داشت که ما را مستقیماً به تصدیق یا تکذیب یک مدّعی خاص هندسی مانند اینکه «مجموع زوایای داخلی یک مثلث برابر با ۱۸۰ درجه است» برساند یا خیر. پاسخ این پرسش منفی است، زیرا نظریه‌ی صدق تارسکی چارچوبی کلی فراهم می‌کند که بر پایه‌ی آن می‌توان به «شرایط» صدق یک جمله یا مدّعی علمی دست یافت، وگرنه این بر عهده‌ی معیارهای جزئی درون هر علم یا نظریه است که مطابقت یا عدم مطابقت جمله با واقع را تحقیق و تعیین کنند. در نتیجه تعریف صدق تارسکی معیاری درون‌علمی برای تحقیق مطابقت یا عدم مطابقت یک مدّعا با جهان خارج نیست، بلکه چهارچوبی است ورای آنها و چارچوبی برای انتساب «صفت» صدق یا کذب به هر یک از احکام، مدّعیات و جملات ابراز شده در این علوم. چهارچوبی معروف که آن را با هم ارزی زیر می‌شناسند:

«X» صادق است، اگر و فقط اگر X

اکنون به پرسش کلیدی این مقاله نزدیک می‌شویم: پرسش از صدق و کذب جمله‌ها (قضیه‌ها)ی علوم قیاسی یا همان «شرایط» صدق یک جمله یا مدّعی علوم قیاسی. در عین حال توجه داریم که اصل گفته شده در بالا یعنی استقلال و کلیت نظریه‌ی صدق تارسکی از مدّعیات درون علوم، درباره‌ی صدق جملات علوم قیاسی هم برقرار است. یعنی تعریف صدق تارسکی - با فرض اینکه بتوان آن را در مورد علوم و نظریه‌های قیاسی اعمال کرد- صرفاً چهارچوبی برای تبیین شرایط انتساب

1. correspondence

2. semantics

3. truth theory

4. Tarski, Alfred (1901- 1983)

5. deductive sciences

صفت صدق یا کذب به گزاره های علوم قیاسی فراهم می سازد، نه آنکه مستقیماً وقوع یا عدم وقوع مدعیات علوم قیاسی را بیازماید تا در مورد مطابقت یا عدم مطابقت آنها با امری ورای خودشان، داوری کند. به این ترتیب پروژه ی کنونی ما عبارت است از مطالعه ی چگونگی تحقیق صدق هر یک از قضیه های تولید شده و جمله ها ابراز شده در علوم قیاسی و شناسایی روش های معیار برای تحقیق طرف چپ معیار کفایت مادی T تارسکی، برای تعریف صدق جملات علوم قیاسی که در قالب هم ارزی گفته شده در بالا بیان شده است.

اما پیش از پرداختن به اصل پروژه ی پیش روی، لازم است با در نظر داشتن نظریه ی مطابقتی و معناشناختی صدق تارسکی و آراء وی در باب علوم قیاسی، اجمالاً به مطالعه ی چند مفهوم مقدماتی در درک بهتر پرسش این مقاله و سپس به بحث اصلی خود پردازیم.

### ۱. از بداهت شهودی تا برهان صوری

تا زمانی که بحث اصل موضوعی<sup>۱</sup> کردن شاخه های مختلف ریاضیات طرح نشده بود، هر یک از شاخه های ریاضیات را تعداد انبوهی جمله و گزاره تشکیل می داد که در تشکیل آنها دایره ی گسترده ای از روابط و مفاهیم ریاضی دخالت داشتند و کسی در مورد صدق آنها هم تشکیک نمی کرد. نه از آن جهت که صدق و کذب آنها اهمیتی نداشت، بلکه به واسطه ی اینکه صدق آنها بر پایه ی بداهت شهودی شان بنا می شد. یعنی یک جمله یا خود دارای بداهت شهودی بود یا اینکه با روش های معمول و جاری شاخه های ریاضی بر پایه ی جمله های بدیهی دیگری اثبات و لذا صادق انگاشته می شد. طبیعتاً حتی اگر برای این مواجهه ی شهودی با احکام ریاضی هم ضابطه ای در نظر گرفته می شد، آن ضابطه قابلیت تصدیق همگانی نزد ریاضیدانان نداشت؛ بگذریم از اینکه بسیاری از تناقض ها یا پارادوکس های منطقی که ریاضیدان با آنها مواجه می شد، عمدتاً بر پایه ی همین احکام و جمله های ریاضی ای تولید شده بودند

---

<sup>1</sup> axiomatization

که او آنها را دارای بداهت شهودی و لذا صادق می‌دانست.

تلاش برای تأسیس مجدد بسیاری از شاخه‌های ریاضیات با روش اصل موضوعی و عرضی مفهوم جدیدی از برهان ریاضی<sup>۱</sup>، واکنشی بود که برخی ریاضیدانان نسبت به «بداهت شهودی» و مفهوم صدق برآمده از آن، از خود نشان دادند. به این ترتیب در دستگاه‌های اصل موضوعی پای مفهوم جدیدی به نام «برهان»<sup>۲</sup> به میان آمد که در نگاه اول به عنوان روش تعیین یا تضمین صدق جمله‌های علوم و نظریه‌های قیاسی به نظر می‌رسد. مفهوم کلی برهان نزد بسیاری از متفکران و معرفت‌شناسان ریاضی، شناخته شده است، اما این مفهوم نزد تارسکی یکسره وابسته به دستگاه‌های قیاسی اصل موضوعی و طرح آن هم تابع این قبیل دستگاه‌هاست.

در تأسیس یک دستگاه ریاضی به روش اصل موضوعی باید تعداد متناهی و محدودی از جمله‌های آن به عنوان «اصول موضوع» در نظر گرفته شوند و اینها جمله‌هایی از دستگاه هستند که صدق آنها را بی‌واسطه می‌پذیریم. سپس در این دستگاه هیچ جمله‌ای را صادق نمی‌دانیم، مگر اینکه بتوان آن را بر پایه‌ی اصول موضوع دستگاه و سایر جمله‌های قبلاً اثبات شده به اثبات رساند. در مورد اصطلاحات و مفاهیم استفاده شده در این دستگاه هم درست به همین نحو عمل می‌کنیم. شاید بتوان گفت که این روش به نوعی در زمان اقلیدس و درون هندسه‌ی اقلیدسی هم جاری بود، حتا به این معنا که او هم برای رسیدن از تعدادی اصل موضوع یا جمله‌ی اثبات شده به جمله‌های قابل اثبات جدید از برهان مدد می‌گرفت، اما مهمترین خصیصه‌ی برهان در ریاضیات کلاسیک و از جمله در کارهای هیلبرت، همان خصیصه‌ی شهودی آن بود که مبتنی بر قواعد استنتاج<sup>۳</sup> مشخص، متناهی و هم‌سنخی نبود. لذا وجه تمایز دستگاه‌های اصل موضوعی جدید را می‌توان دستیابی آنها به تقریر جدیدی از برهان یا استنتاج ریاضی برای بنا کردن جمله‌های جدید بر

<sup>1</sup> mathematical proof

<sup>2</sup> proof

<sup>3</sup> rules of inference

پایه‌ی جمله‌های پیشین (اصول موضوع و جمله‌های قبلاً اثبات شده) دانست. نزد تارسکی، دستیابی به برهان صوری در یک دستگاه اصل موضوعی مستلزم آن است که ابتدا زبان دستگاه اصل موضوعی ما صوری شود. سپس این امکان را خواهیم داشت که قواعد برهان یا همان قواعد استنتاجی دستگاه اصل موضوعی را به نحو صوری بنا کنیم. عقیده‌ی جریان‌ساز تارسکی این است که با داشتن این قواعد صوری برهان یک جمله‌ی صوری را می‌توان قابل استنتاج از مجموعه‌ی مقدمات صوری (اصول موضوع صوری یا سایر قضیه‌های استنتاج شده‌ی دستگاه) دانست، اگر صورت آن جمله رابطه‌ی مشخصی با صورت مقدمات خود داشته باشد. با در اختیار داشتن این قواعد صوری برهان است که بیش از گذشته نسبت به خطاناپذیری این روندهای استنتاجی و در نتیجه صدق قضایای اثبات شده اطمینان داریم و این خطاناپذیری هم مرهون خطاناپذیری و غیرشهودی بودن برهان صوری و قیاسی بودن آن است. به این ترتیب تعریف نهایی و غیرشهودی تارسکی این است که برهان صوری در یک دستگاه اصل موضوعی صوری به معنای ساختن یک دنباله‌ی متناهی از جمله‌های دستگاه است که در این دنباله:

۱. اولین جمله یک اصل موضوع است.
۲. هر یک از جمله‌های بعدی در این دنباله یا خود یک اصل موضوع است یا اینکه به مدد همین قواعد برهان از جمله‌های قبلاً اثبات شده‌ی دستگاه استنتاج می‌شود. و
۳. آخرین جمله‌ی این دنباله، همان است که در صدد اثبات آن هستیم و در یک دستگاه صوری به آن نتیجه<sup>۱</sup> می‌گویند.<sup>۲</sup>

مهمترین نتیجه‌ی حاصل از تعریف صوری برهان این است که با به‌کارگیری برهان صوری در یک دستگاه قیاسی، اگر هم بحث و تردیدی درباب صدق و کذب هر یک از جمله‌های دستگاه اصل موضوعی ما به میان آید، این تردید را یکسره می‌توان

---

<sup>1</sup> Consequence

<sup>2</sup> Tarski, A., *Introduction to Logic and to the Methodology of the Deductive Sciences*, pp. 109-111; & Tarski, A., "The Semantic Conception of Truth and the Foundations of Semantics" in: *Philosophy and Phenomenological Research* 4.3, (1944), p. 346.

ناشی از دو عامل دانست و به آنها فروکاست، بدون آنکه هیچ ارتباطی با خود جمله‌های استنتاج شده داشته باشد: الف. اصول موضوع دستگاه قیاسی، ب. قواعد صوری برهان.

کافی است که صرفاً از خلل‌ناپذیری قواعد برهان علوم اصل موضوعی و صدق اصول موضوع آنها اطمینان حاصل کنیم تا مطمئن شویم که تمام قضایای علوم قیاسی اصل موضوعی، صادق هستند. پیش‌فرض ما هم این است که اگر اصول موضوع دستگاه قیاسی جمله‌های صادقی باشند، اعمال قواعد صوری برهان بر آنها موجب استنتاج جمله‌های منحصراً صادق دیگری در بدنه‌ی آن می‌شود و به لحاظ منطقی امکان ندارد که از یک یا چند جمله‌ی صادق، جملات کاذب نتیجه‌گیری شود و اساساً کارکرد برهان صوری، تولید جمله‌های صادق در یک دستگاه قیاسی بر پایه‌ی اصول موضوع صادق این قبیل دستگاه‌هاست.<sup>۱</sup> به این ترتیب، مفهوم برهان ریاضی بسیار ساده‌تر از گذشته و قابل فهم‌تر شده است و لذا قابلیت اشتراک آن در میان ریاضیدانان مختلف افزایش یافته است.

## ۲. از اثبات‌پذیری تا صدق

اکنون پرسش ما محدودتر شده است: آیا برهان صوری برای استنتاج صوری تمام جمله‌های صادقی که به هر نحو می‌توانند از مقدمات صادق دستگاه ناشی شوند، کافی و کاراست؟ و لذا بر پایه‌ی این سؤال، آیا مجموعه جمله‌های قابل اثبات در یک دستگاه اصل موضوعی با مجموعه‌ی جمله‌های صادق آن دستگاه منطبق است؟ از دیدگاه تارسکی، این پرسش، متعلق به حوزه‌ی فراریاضیات<sup>۲</sup> است و باید در همان محدوده تحقیق شود. زیرا او در مباحث خود به خوبی نشان داده است که هم «اثبات‌پذیری» جمله‌های یک دستگاه اصل موضوعی و هم «صدق» آنها، هر دو،

<sup>۱</sup> ناگل، ارنست، جیمز نیومن و آلفرد تارسکی، *برهان گودل و حقیقت و برهان*، ترجمه‌ی محمد اردشیر، تهران، مولی، ۱۳۶۴، صص ۱۳۵-۱۳۰.

<sup>۲</sup> Metamathematics

مفاهیمی متعلق به فرازبان<sup>۱</sup> آن دستگاه اصل موضوعی هستند. تعریف اثبات‌پذیری را می‌توان از فراریاضیات به زبان موضوع دستگاه اصل موضوعی ترجمه کرد، چون این مفهوم را می‌توان یکسره بر حسب مفاهیم موجود در زبان موضوع تعریف کرد، اما مفهوم صدق جملات دستگاه، مفهومی است که یکسره متعلق به فرازبان آن است و بر خلاف تعریف اثبات‌پذیری، قابل ترجمه به زبان موضوع دستگاه اصل موضوعی نیست. چون در صورت تعریف صدق در زبان موضوع با پارادوکس‌های معناشناسانه‌ای مانند پارادوکس دروغگو دست به گریبان می‌شویم.<sup>۲</sup> به این ترتیب برهان و مفهوم کلیدی برآمده از آن یعنی اثبات‌پذیری می‌توانند در خود دستگاه اصل موضوعی ما شکل بگیرند، ولی صدق در فرادستگاه یا به عبارت بهتر در فرازبان آن نظریه شکل می‌گیرد.

بر این اساس پاسخ پرسش اولیه‌ی ما منفی است و مجموعه جمله‌های قابل اثبات دستگاه اصل موضوعی ما بر مجموعه‌ی جمله‌های صادق این دستگاه منطبق نیست. هر جمله‌ی قابل اثبات در یک دستگاه اصل موضوعی - مشروط بر صدق اصول موضوع دستگاه - جمله‌ای صادق هم هست، اما هر جمله‌ی صادق از دستگاه اصل موضوعی را نمی‌توان اثبات کرد. منشأ این ماجرا هم این است که زبان موضوع دستگاه اصل موضوعی، زیرمجموعه‌ی فرازبان آن است (نه بالعکس). لذا مجموعه‌ی جملات اثبات‌شدنی یک دستگاه قیاسی اصل موضوعی (P) و مجموعه جملات صادق آن دستگاه (T) چنین رابطه‌ای با هم دارند:  $P \subseteq T$ .

همواره در دستگاه‌های اصل موضوعی می‌توان جمله‌هایی را بر مبنای مفاهیم اولیه‌ی دستگاه صورت‌بندی و بیان کرد که به لحاظ شهودی صادق به نظر می‌رسند و کذب آنها هم غیر قابل اثبات است، اما خود آنها را نمی‌توان در درون دستگاه اثبات کرد. همین واقعیت است که مجموعه جمله‌های صادق دستگاه قیاسی

---

<sup>۱</sup> Metalanguage

<sup>۲</sup> نک:

Tarski, A., "The Semantic Conception of Truth and the Foundations of Semantics", p. 348.

را به یک حد تقریباً دست نیافتنی تبدیل ساخته است و خللی جدی است در این اعتقاد که برهان صوری و اثبات شدگی ناشی از آن، می‌تواند ابزاری مناسب و کافی برای ضمانت صدق احکام ریاضی باشد.

با وجود آنکه همه‌ی بار اثبات جمله‌های دستگاه بر دوش «اصول موضوع» و «قواعد برهان» است، اما همیشه نمی‌توان با ترمیم اصول موضوع یا قواعد برهان یا هر دوی اینها تمام جمله‌ها صادق برآمده یا قابل استخراج از اصول موضوع را اثبات کرد. یعنی همیشه نمی‌توان با افزودن یک یا چند اصل موضوع یا قواعد جدید برهان به جمع اصول موضوع و قواعد استنتاجی دستگاه قیاسی، بقیه‌ی جمله‌های صادق و اثبات‌ناپذیر جدیدتری در درون دستگاه سر برمی‌آورند. چون بر پایه‌ی آن اصول موضوع جدید، جمله‌ها جدید دیگری استنتاج می‌گردد. اما به هر حال می‌توان با به‌کارگیری این روش و جبران برخی نقائص احتمالی در اصول موضوع یا قواعد برهان یا هر دوی اینها، با تقریب نسبتاً قابل قبولی، فاصله‌ی میان جمله‌های اثبات‌ناپذیر دستگاه با جمله‌های صادق آن را کاهش داد و اغلب جمله‌های صادق اما اثبات نشده‌ی درون دستگاه را اثبات نمود. لذا تارسکی معتقد است که با تکرار فرایند گسترش اصول موضوع یا قواعد برهان می‌توان به تدریج به حد ایده‌آل جمله‌های صادق نزدیک شد و تعداد بیشتری از آنها را اثبات کرد اما انطباق تام دو مجموعه  $P$  و  $T$  غیر قابل حصول است.

تنها دستگاه‌های اصل موضوعی که تارسکی معتقد است می‌توان تمام جمله‌های صادق درون آنها را به اثبات رساند، یعنی مفهوم اثبات‌پذیری با مفهوم صدق در آنها منطبق است، دستگاه‌های اصل موضوعی ساده‌ای از قبیل هندسه‌ی مقدماتی، جبر مقدماتی اعداد حقیقی و دستگاه‌های غیرپیچیده‌ای از این قبیل هستند. در غیر این موارد همواره مجموعه جمله‌ها قابل اثبات دستگاه قیاسی، کوچکتر از مجموعه جمله‌ها صادق دستگاه قیاسی و زیرمجموعه‌ی آن است. یکی از نتایج مهم این بحث این است مفهوم اثبات‌پذیری و گوهر درونی آن یعنی مفهوم



برهان را نمی‌توان جایگزین کافی و مناسبی برای مفهوم صدق دانست، اما می‌توان با پیگیری فرایند توسعه‌ی گفته شده این دو را به صورت حدّی به هم نزدیک کرد.<sup>۱</sup> چند نکته و نتیجه‌ی جانبی مهم هم برای این بحث وجود دارد که اگر چه ادامه‌ی بحث ما درباره‌ی آنها نیست، اما بیان آنها به روشن‌تر شدن فضای بحث کمک خواهد کرد:

اولین نتیجه‌ی جانبی این بحث این است که تأسیس و همین‌طور توسعه‌ی قیاسی یک دستگاه اصل موضوعی صوری و نضج قضایای آن، وابسته به برهان صوری و لذا در گرو مفهوم «اثبات‌پذیری» است، نه «صدق»؛ اما دیدیم که این روش، متکفل اثبات تمام جملات صادق صورت‌بندی شده در این دستگاه نیست. به این ترتیب، اهتمام تارسکی به بررسی صدق و کذب جمله‌های (قضایای) یک دستگاه قیاسی صوری، مستقل از تأسیس قیاسی آن دستگاه همچنان باقی است و آنرا باید در فراریاضیات جست.<sup>۲</sup>

دومین نتیجه‌ی جانبی این بحث هم به فقدان تمامیت دستگاه‌های مورد بحث باز می‌گردد. این گفته که در اغلب دستگاه‌های قیاسی اصل موضوعی، هر جمله‌ی قابل اثبات در آن دستگاه، جمله‌ای صادق هم هست، اما هر جمله‌ی صادق از دستگاه اصل موضوعی را نمی‌توان اثبات کرد، بدان معناست که هر دو جمله‌ی متناقض صورت‌بندی شده در یک دستگاه قیاسی را که در نظر بگیریم؛ الف: حداقل یکی از این دو را می‌توان در این دستگاه به اثبات رساند (بنا به قانون منطقی طرد شقّ ثالث، ناظر بر مفهوم اثبات‌پذیری)؛ ب: ممکن است هیچ یک از آنها هم اثبات‌پذیر نباشد (با توجه به مفهوم معناشناختی طرد شقّ ثالث<sup>۳</sup> مبنی بر اینکه یکی

<sup>۱</sup> ناگل، ارنست، جیمز نیومن و آلفرد تارسکی، برهان گودل و حقیقت و برهان، صص ۱۴۲-۱۳۸.

<sup>۲</sup> نک:

Tarski, A., "The Semantic Conception of Truth and the Foundations of Semantics", p. 357.

<sup>۳</sup> مفهوم معناشناختی طرد شقّ ثالث به کمک مفهوم معناشناختی صدق تعریف می‌شود، در حالی که مفهوم منطقی طرد شقّ ثالث بدون استفاده از مفاهیم معناشناختی مانند صدق و با استفاده از مفاهیم منطقی مانند "اثبات‌پذیری" تعریف می‌شود.

و فقط یکی از دو جمله‌ی متناقض، صادق است و نیز بنا به تمایز گفته شده در بالا مبنی بر اینکه در اغلب دستگاه‌های اصل موضوعی، هر جمله‌ی صادقی الزاماً اثبات‌پذیر نیست).

نتیجه‌ی الف متضمن این معناست که دستگاه اصل موضوعی ما سازگار است. اما با توجه به اینکه تمامیت یک نظریه‌ی قیاسی اصل موضوعی منوط به این است که تمام جمله‌هایی که با استفاده از مفاهیم آن نظریه صورت‌بندی شده‌اند را بتوان در همان نظریه و با استفاده از تعاریف و قوانین استنتاجی آن نفی یا اثبات کرد، نتیجه‌ی ب به این معناست که چنین دستگاهی تمامیت ندارد.<sup>۱</sup> لذا حصول تمامیت دستگاه قیاسی مستلزم آن است که حتماً مجموعه‌ی جملات اثبات‌پذیر دستگاه بر جملات صادق آن منطبق باشد. این انطباق هم فقط در صورتی حاصل می‌شود که با یک دستگاه اصل موضوعی ساده‌ی مقدماتی با اصول موضوع و جملات استنتاج شده (قضایای) محدود مواجه باشیم که مجموعه جمله‌های صادق و مجموعه جمله‌های اثبات‌پذیر آن بر یکدیگر منطبق باشند؛ فقط در این صورت است که دستگاه اصل موضوعی ما علاوه بر سازگاری، تمامیت هم خواهد داشت؛ وگرنه اغلب دستگاه‌های قیاسی، به خصوص دستگاه‌های نظری و قیاسی گسترده فاقد تمامیت هستند.

سومین نتیجه‌ی جانبی ما هم به تمایز تارسکی از سنت پیش از وی مربوط است. آنچه برای هیلبرت<sup>۲</sup> و دیگر صورت‌گرایان و نحوگرایان مهم است، مفهوم «اثبات‌پذیری» و استنتاج‌پذیری است، نه «صدق»؛ اینکه چه جملاتی را می‌توان از اصول موضوع دستگاه استنتاج کرد. اساس صورت‌گرایی هیلبرت این بود که ریاضیات کلاسیک را باید مجموعه‌ای از دستگاه‌های اصل موضوعی تفسیر نشده دید که در آنها کاری به مفهوم صدق نداریم. او حتی مدعی نبود که هر قضیه‌ی ریاضی یا صادق است یا کاذب. اما تارسکی درباره‌ی دستگاه‌های اصل موضوعی هم به صدق قائل بود،

<sup>۱</sup> Tarski, A., "The Semantic Conception of Truth and the Foundations of Semantics", p. 354.

<sup>۲</sup> David Hilbert (1862-1943)

هم به اثبات‌پذیری و هم به رابطه‌ی میان این دو مفهوم. اثبات‌پذیری را هم منجر به صدق می‌دانست، یعنی نزد او هر جمله‌ی اثبات‌پذیری صادق است (نه بالعکس). حتی او در ارتباط با مفهوم صدق کوشید تا تقریری معناشناسانه از دو مفهوم «تناقض» و «طرد شقّ ثالث» عرضه کند. لذا بر خلاف تارسکی، پروژه‌ی هیلبرت بر مدار اثبات‌پذیری می‌چرخید، نه صدق.<sup>۱</sup>

### ۳. از اعتبار نحوی تا اعتبار معناشناختی

درست متناظر با روند دوگانه‌ی «اثبات» و «صدق» می‌توان دو معنا برای «اعتبار»<sup>۲</sup> در یک دستگاه اصل موضوعی صوری در نظر گرفت: «اعتبار نحوی» متناظر با اثبات‌پذیری و «اعتبار معناشناختی» متناظر با صدق. درست همین دو منظر هستند که دستمایه‌ی تعریف دو مفهوم اعتبار نحوی و اعتبار معناشناختی را برای ما فراهم می‌کنند. یعنی با داشتن سلسله‌ای از «زدس»<sup>۳</sup> ها داریم:

اعتبار نحوی: برهان صوری  $S_1, S_2, \dots, S_{n-1}, S_n$ ، که در زبان صوری  $L$  شکل گرفته است دارای اعتبار نحوی است، اگر و فقط اگر بتوان  $S_n$  را از  $S_1, S_2, \dots, S_{n-1}$  و اصول موضوع دستگاه به کمک قواعد صوری برهان شکل گرفته در زبان  $L$ ، نتیجه‌گیری کرد.

اعتبار معناشناختی: برهان صوری  $S_1, S_2, \dots, S_{n-1}, S_n$ ، شکل گرفته در زبان صوری  $L$  دارای اعتبار معناشناختی است، اگر و فقط اگر در هر تعبیری که  $S_1, S_2, \dots, S_{n-1}$  در آن صادق باشد،  $S_n$  هم در آن تعبیر صادق باشد.

<sup>۱</sup> برای مطالعه‌ی آراء هیلبرت نک:

وحید، حمید، "گرایشهای موجود در فلسفه ریاضیات، نشر ریاضی"، سال دهم، شماره ۲، ص ۱۵.  
همچنین نک:

Detlefsen, M., "Formalism", pp 292-355.

<sup>۲</sup> validity

<sup>۳</sup> «زدس» را به عنوان کوتاه نوشتی برای «زنجیره‌ی درست ساخت» در نظر می‌گیریم. زنجیره‌ی درست ساخت از یک زبان صوری هم جمله‌ای در این زبان است که مطابق قواعد آن ساخته شده باشد، اعم از آنکه اثبات شده یا نشده باشد و صادق یا کاذب باشد.

در اینجا سه نکته شایسته‌ی تأکید است. اول: مفاهیم اعتبار نحوی و اعتبار معناشناختی دو نوع مواجهه با یک برهان صوری هستند. یعنی می‌توان آنها را همزمان نسبت به یک برهان صوری واحد، آن هم در یک دستگاه قیاسی طرح کرد. دوم: یکی از مهمترین دستاوردهای این دو نوع اعتبار این است که اگر یک برهان صوری به لحاظ نحوی اعتبار داشته باشد،  $S_n$  یک «قضیه» از دستگاه صوری مورد بحث ما خواهد بود و اگر آن برهان صوری به لحاظ معناشناختی اعتبار داشته باشد،  $S_n$  دارای «صدق منطقی» است.<sup>۱</sup> سوم: موضع تارسکی در برابر این تقسیم‌بندی موضعی مثبت است و البته در اینجا مجالی برای پرداختن به این موضوع نیست. همین قدر بگوییم که استفاده از مفهوم اعتبار به عنوان مترادفی برای مفهوم صدق یا تعریف اعتبار بر حسب این مفهوم، شایع‌ترین نوع کاربرد و مواجهه با مفهوم اعتبار منطقی<sup>۲</sup> نزد تارسکی و دیگر معرفت‌شناسان ریاضی بوده است.<sup>۳</sup>

#### ۴. جمع‌بندی میانی؛ دستیابی به پرسشی معنادار

تعامل دو سوپه‌ای میان مفهوم «صدق» با علوم و نظریه‌های قیاسی که اکنون در صدق تحقیق گزاره‌های آنها هستیم، وجود دارد. از یکسو دانش معناشناسی هم در تأسیس علوم و نظریه‌های قیاسی اصل موضوعی و هم در روش‌شناسی آنها دخالت دارد و مهم‌تر اینکه تأسیس و تفسیر هر دو عرصه بدون استفاده از عناصر و مفاهیم معناشناسانه و لذا خود دانش معناشناسی امکان‌پذیر نیست؛ در سوی مقابل مفهوم

<sup>۱</sup> هاک، سوزان، *فلسفه منطقی*، ترجمه‌ی محمد علی حجتی، قم، کتاب طه، ۱۳۸۲، صص ۴۵-۴۴.

<sup>۲</sup> logical validity

<sup>۳</sup> برای ملاحظه‌ی آراء سه نفر از معرفت‌شناسان سرشناس ریاضی در این باره و تعریف مفهوم اعتبار بر حسب مفهوم صدق نزد آنها نک:

Jacquette, D., "On the Relation of Informal to Symbolic Logic", p. 145. (footnote)

همچنین نک:

Beall, J. C., "Truth and Paradox: a Philosophical Sketch", p. 378.

و نیز نک:

Nolt, J., "Free Logics", p. 1051.

صدق نزد تارسکی هم مفهومی معناشناسانه است. لذا دانش معناشناسی حلقه‌ی وصل مناسبی میان علوم قیاسی و مفهوم صدق است که می‌خواهیم آن را در علوم و نظریه‌های قیاسی تحقیق کنیم. زیرا با توجه به معناشناسانه بودن بحث صدق، می‌توان آن را جزئی از روش‌شناسی علوم قیاسی هم به حساب آورد. یعنی بحث درباره‌ی صدق قضایای علوم قیاسی، بحثی ذیل روش‌شناسی علوم قیاسی است. به هر حال نتیجه‌ی کنونی ما این است که بحث درباره‌ی صدق قضایای علوم قیاسی به عنوان یکی از ویژگی‌های معناشناختی این دستگاه‌ها، بحثی معنادار است و موضوعیت دارد که پس از این خواهیم کوشید تا به نحوی درخور به آن پاسخ دهیم.

#### ۵. آغاز ماجرا: تارسکی و توسعه‌ی مفهوم «نتیجه‌ی منطقی»

اکنون وارد پروژه‌ی پژوهشی اصلی این مقاله می‌شویم و آزمون و خطاهایی را تا رسیدن به طرح پیشنهادی این مقاله پی می‌گیریم. واقعیت این است که تمام توسعه‌ی یک دستگاه قیاسی اصل موضوعی مانند منطق، ریاضیات و سایر دستگاه‌های صوری مرهون مفهوم «نتیجه» به عنوان یک مفهوم کلیدی در این قبیل دستگاه‌ها و حاصل رابطه‌ی میان اجزای ترکیب دوتایی «مقدمه<sup>۱</sup> - نتیجه» و قواعد استنتاجی ذیل این مفهوم مهم در کار تارسکی است. اساساً نزد او تمام مفاهیم بنیادی فراریاضیات را می‌توان به کمک همین ترکیب دوتایی، تعریف و ره‌گیری کرد.<sup>۲</sup> اکنون می‌خواهیم به آزمون این مطلب بپردازیم که آیا می‌توان به کمک همین دوتایی «مقدمه - نتیجه» بستری برای بررسی صدق جملات علوم قیاسی فراهم کرد یا خیر؟

بدنه‌ی یک دستگاه قیاسی را جمله‌ها و به بیان رایج دستگاه‌های صوری، قضایای آن تشکیل می‌دهند، که این قضایا هم به نوبه‌ی خود در فرایندی استنتاجی

---

<sup>۱</sup> مقدمه می‌تواند مجموعه‌ای شامل یک یا چند جمله‌ی اثبات شده در درون دستگاه، یک یا چند اصل موضوع یا هر دوی اینها باشد.

<sup>۲</sup> Tarski, A., "Fundamental Concepts of the Methodology of the Deductive Sciences", p. 69.

از اصول موضوع و سایر قضایای پیشتر استنتاج شده‌ی دستگاه قیاسی نتیجه‌گیری شده‌اند. ظاهر امر این است که مفهوم نتیجه‌ی شکل گرفته در دستگاه‌های قیاسی، بر بستر قیاس منطقی بنا شده است و در حقیقت فرایندی استنتاجی است که طی آن از یک یا چند جمله (اعم از اصول موضوع یا قضیه‌های اثبات شده‌ی دستگاه) به کمک قواعد قیاس، نتیجه‌ای حاصل می‌شود. اما تارسکی معتقد است که مفهوم «نتیجه‌ی منطقی» به عنوان جزئی غیر قابل انکار از دستگاه‌های قیاسی دایره‌ی وسیع‌تری دارد؛ لذا با تصویری که برخی منطقدانان دیگر از این مفهوم ارائه می‌کنند، اندکی متفاوت است. همین امر باعث می‌شود که با استفاده از تعریف خاص تارسکی از مفهوم نتیجه‌ی منطقی بتوان بستری برای صدق‌نگاری خاص علوم قیاسی فراهم کرد.

#### ۵-۱. توسعه‌ی مصداقی مفهوم نتیجه‌ی منطقی

فرایند استنتاجی دستگاه‌های قیاسی که گاهی، به خصوص از سوی نحوگرایان، ادعا می‌شود که می‌توان مفهوم نتیجه‌ی منطقی را به آن فروکاست یا به عبارت بهتر صرفاً مفهوم نتیجه‌ی منطقی را بر حسب این فرایندها و اجزای آنها تبیین کرد، شامل تعدادی قواعد استنتاجی است که صرفاً تبدیل‌های صوری و ساختاری میان اصول موضوع و نتایج آنها (قضایای دستگاه) را رقم می‌زنند. خیلی از منطقدان‌ها، به خصوص نحوگرایان، معتقد بودند که مفهوم نتیجه‌ی منطقی هم چیزی بیش از این نیست. مهم‌ترین دلیل این دسته افراد، موفقیت قواعد قیاسی استنتاج در بازسازی غالب استدلال‌های شناخته شده در ریاضیات طبیعی یا کلاسیک در دستگاه‌های قیاسی تأسیس شده بود. اما تارسکی در مقاله‌ای با عنوان «مفهوم نتیجه‌ی منطقی»<sup>۱</sup>، کارایی صرف را دلیل مناسبی برای فروکاستن و محدود کردن مفهوم نتیجه‌ی

<sup>۱</sup> "On the Concept of Logical Consequence"؛ این مقاله چکیده‌ی سخنرانی تارسکی در کنگره‌ی بین‌المللی فلسفه‌ی علمی پاریس است که در سال ۱۹۳۵ عرضه شده است و ابتدا به زبان لهستانی و سپس در سال ۱۹۴۶ به زبان‌های آلمانی و انگلیسی منتشر شد.

منطقی به استنتاج‌های منطقی دستگاه قیاسی نمی‌داند. در حقیقت او بدون گشودن و تشریح موضوع، با طرح یک مثال در حوزه‌ی نتیجه‌گیری‌های استقرایی<sup>۱</sup>، نشان می‌دهد که مفهوم نتیجه‌ی منطقی اگر صرفاً در حد استنتاج‌های موجود در دستگاه‌های اصل موضوعی صوری نگریسته شود، منحصر به معنایی قیاسی می‌ماند و بخش عمده‌ای از استنتاج‌های منطقی را که ناظر استنتاج‌های غیر قیاسی از قبیل استنتاج‌های استقرایی هستند، از دست خواهیم داد. در حالی که طبق شهود روزمره‌ی اغلب ریاضیدان‌ها حاصل استقراء هم نوعی نتیجه‌ی منطقی است و تارسکی معتقد است که نمی‌توان این شهود را نادیده گرفت.

فرض کنید در یک دستگاه اصل موضوعی صوری برای تعدادی از اعداد طبیعی بتوان احکام زیر را به مدد روشهای استنتاجی موجود در این دستگاه‌ها اثبات کرد:

الف. عدد ۰ خاصیت  $p$  را داراست.

ب. عدد ۱ خاصیت  $p$  را داراست.

و... به طور کلی جملاتی داشته باشیم به صورت:

عدد  $n$  خاصیت  $p$  را داراست.

که در اینجا  $n$  نمایانگر هر عدد طبیعی است که این خاصیت را دارد. مسلماً شهود هر ریاضیدانی می‌پذیرد که بر پایه‌ی این جملات می‌توان نتیجه گرفت که «هر یک از اعداد طبیعی دارای خاصیت  $p$  هستند»، در حالی که به هیچ وجه نمی‌توان چنین جمله‌ای را به کمک قواعد استنتاجی رایج در دستگاه‌های صوری اثبات نمود و این یک نارسایی در تعریف مفهوم نتیجه‌ی منطقی به کمک قواعد استنتاج صوری است.<sup>۲</sup> پروژه‌ی تارسکی این است که چنان مفهوم وسیعی از نتیجه‌ی منطقی ارائه کند که فعالیت غیرصوری و روزمره‌ی ریاضیدان‌ها را پوشش دهد و دستگاه اصل موضوعی ریاضی و منطقی را هم به حد اکثر کارکرد خود نزدیک سازد. نکته‌ای که در رفتار صرفاً صوری هیلبرت مغفول مانده بود. به هر حال نتیجه‌ی کنونی این است که اگر

---

<sup>1</sup> Inductive

<sup>2</sup> Tarski, A., "On the Concept of Logical Consequence", p. 410.

قرار باشد مفهوم نتیجه‌ی منطقی را در حدّ استنتاج‌های موجود در دستگاه‌های قیاسی تقلیل دهیم، پاسخگوی نیازهای حداکثری ریاضیدان‌ها نخواهد بود. تارسکی در فاز اولیه‌ی کار خود، برای خروج از انحصار گفته شده، کوشید تا استقرای منطقی و مفاهیمی نظیر آن را که تا کنون در روندهای قیاسی حضور نداشته‌اند به نحوی تعریف کند که در شمار قواعد دستگاه قیاسی درآیند و سرشتی همسان با دیگر قواعد استنتاجی این دستگاه داشته باشند. یعنی هم مانند دیگر قواعد استنتاجی معمول دستگاه صورت‌بندی شوند، هم اینکه مفاهیمی که در این صورت‌بندی به کار گرفته می‌شود همانند دیگر قواعد استنتاجی دستگاه باشند.<sup>۱</sup> علاوه بر این، او کوشید تا به همین سیاق هم در مورد سایر قواعد غیرقیاسی دیگر به جز استقرای بی‌نهایت منطقی عمل کند و آنها را به مصداق‌های استنتاجی، ذیل مفهوم نتیجه‌ی منطقی بیفزاید و به این وسیله دایره‌ی قواعد استنتاجی خطاناپذیری را که می‌توانند به مفهوم نتیجه‌ی منطقی منجر شوند، وسیع‌تر کند. خطاناپذیر هم به این معنا که بتوان با اعمال این روندهای استنتاجی جدید بر جملات صادق، جملاتی نتیجه گرفت که آنها هم – حداقل به طور شهودی – صادق‌اند. لذا او در پی آن است که مفهوم نتیجه‌ی منطقی را بر مفهوم شهودی و معمول آن منطبق سازد و آن را به نحو حداکثری توسعه دهد. اما بر سر راه فربه‌تر ساختن قواعد تبدیل مجاز در یک دستگاه صوری یک هشدار جدّی وجود دارد: نتایج قضایای گودل<sup>۲</sup> نشان می‌دهند که این امر برای دستگاه‌های اصل موضوعی غیرممکن است. به هر حال در یک نظریه‌ی قیاسی اصل موضوعی می‌توان جمله‌هایی ساخت که در عین آنکه جمله‌های ساخته شده و قابل استحصالی از مفاهیم این نظریه هستند، اما باز نمی‌توان آنها را بر پایه‌ی این قواعد استنتاجی توسعه یافته‌ی موجود در دستگاه به اثبات رساند.<sup>۳</sup> این تعبیری از همان مفهومی است که نشان دادیم که همواره مجموعه

<sup>۱</sup> برای ملاحظه‌ی روش تارسکی در این زمینه نک:

Tarski, A., "On the Concept of Logical Consequence", pp. 411-412 .

<sup>۲</sup> Kurt Gödel (1906-1978)

<sup>۳</sup> Tarski, A., "On the Concept of Logical Consequence", p. 412.



جملات صادق یک دستگاه قیاسی، بزرگتر از مجموعه جملات اثبات پذیر آن دستگاه - برپایه ی قواعد استنتاجی آن دستگاه- است و باید برای نزدیک تر کردن این دو مفهوم به یکدیگر چاره جویی کنیم.

### ۵-۲. تلاش برای باز تعریف مفهوم نتیجه ی منطقی

به هر حال تارسکی اگر چه ضرورت توسعه ی مصداق های ذیل مفهوم نتیجه ی منطقی را احساس می کرد، اما با توجه به بن بست ناشی از قضایای گودل، از توسعه ی مصداقی قواعد استنتاجی دستگاه های قیاسی و تدوین قواعد استنتاجی جدید در چارچوب این دستگاه ها دست کشید و در پی گشودن راهی جدید برای تبیین دقیق این مفهوم از راه تعریف آن برآمد. ارائه ی تعریفی از مفهوم نتیجه ی منطقی که آن چنان فراگیر باشد که بر پایه ی آن بتوان همان ذهنیت شهودی یک ریاضیدان در مفهوم نتیجه ی منطقی را تحقق بخشید؛ یعنی مفهومی از نتیجه ی منطقی به دست داده شود که تمام جملات صادق دستگاه قیاسی را در بر بگیرد، نه فقط جملات اثبات پذیر موجود در آن را.

راه جدید تارسکی برای تعیین مفهوم نتیجه ی منطقی عبارت است از به دست دادن «تعریف» دقیقی برای این مفهوم که به کمک آن بتوان به الگوی مناسبی برای دوتایی «جمله- نتیجه» برای زبان های تمام دستگاه های قیاسی اصل موضوعی دست یافت. تعریفی که از یکسو مانند تعریف کارناپ<sup>۱</sup> مبتنی بر مفاهیم ناشناخته یا مورد بحث دیگری نباشد، که در تعریف آن مفاهیم ذیل آن بمانیم؛ از سویی با خطوط اصلی اندیشه ی تارسکی در باب دستگاه های ریاضی متلائم باشد که یکی از این خطوط مورد اهتمام تارسکی، بحث از معناشناسی و مفاهیم درونی آن مانند «ارضاء»<sup>۲</sup> و «مدل»<sup>۳</sup> است. در اینجا مجال پرداختن به گام های تارسکی تا به تعریف مورد نظر او نیست. همین قدر گفتنی است که کار تارسکی با نقد دقیق و مطالعه ی

---

<sup>۱</sup> Rudolf Carnap (1891-1970)

<sup>۲</sup> Satisfaction

<sup>۳</sup> Model

دقیق تلاش‌های پیشینیان او از جمله کارناپ شکل گرفته است.<sup>۱</sup> لذا تارسکی اساساً در جستجوی تعریفی از مفهوم نتیجه‌ی منطقی بر می‌آید که هیچ جزء تعریف نشده -یا تعریف شده در جایی دیگر- مانند مفهوم «صدق» در خود نداشته باشد. چون صدق و سایر مفاهیم معناشناختی وابسته به زبانی بودند که جمله یا تابع جمله‌ای در آنها بیان می‌شود و جمله‌ای که در زبان الف صادق است، ممکن است در زبان ب کاذب باشد. در اینجا و برای برون‌رفت از این موقعیت، او از دانش معناشناسی و در واقع مفهوم معناشناختی و پایه‌ی ارضای یک تابع جمله‌ای با یک شیء منفرد یا سلسله‌ای از اشیاء کمک می‌گیرد. بحث بعدی ما راهی برای این موضوع خواهد گشود.

### ۵-۳. تعریف معناشناختی مفهوم نتیجه‌ی منطقی

اکنون می‌خواهیم مفهوم نتیجه‌ی منطقی را با استفاده از دو مفهوم معناشناختی ارضاء و مدل تعریف کنیم. می‌دانیم که مفهوم مدل یکی از مفاهیم مهم معناشناختی و ابداع شده از سوی تارسکی است که آن را هم به نوبه‌ی خود می‌توان بر حسب مفهوم معناشناختی ارضاء تعریف کرد.

گاهی جمله‌ای مانند  $S$  از سوی کسی ابراز می‌شود که به خودی خود صادق یا کاذب نیست، یا نمی‌توان در مورد صدق یا کذب آن داوری کرد. یعنی اطلاعات قاطعی در آن نیست که با استفاده از آنها بتوان معنای جمله را دریافت و در مورد صدق یا کذب آن داوری کرد. حال اگر بتوان اطلاعاتی به این جمله افزود تا با افزودن این اطلاعات، جمله‌ی ما به جمله‌ای صادق یا کاذب بدل شود، گفته می‌شود که  $S$

<sup>۱</sup> برای ملاحظه‌ی تعریف کارناپ و نظر مشروح تارسکی درباره‌ی این تعریف بنگرید به توضیحات و پاورقی مندرج در: Tarski, Alfred, "On the Concept of Logical Consequence." p 413؛ همچنین برای دریافت شرحی از تلاش‌های صورت گرفته پیش از تارسکی برای تعریف مفهوم نتیجه‌ی منطقی و عملگرهای نتیجه‌ی منطقی بنگرید به: Czelakowski, Janusz, and Grzegorz Malinowski, "Key Notions of Tarski's Methodology of Deductive Systems," pp 326-328.

تعبیر شده است و اطلاعات افزوده شده به این جمله را «عامل تعبیر» یا «تعبیری»<sup>۱</sup> از S می نامیم و آن را با I نشان می دهیم. حال اگر تعبیر I منجر به تبدیل S به جمله ای صادق شود، در این صورت گفته می شود که I مدلی از (یکی از مدل های) S است یا به عبارت بهتر، تعبیر S، I را ارضاء کرده است. همین مطلب را هم در نوشتار به این صورت می نویسند:  $I \sqsubseteq S$ . این موضوع را به نحو دیگری هم می توان بیان کرد: S در I صادق است و همین مفهوم را مفهوم نظریه ی مدلی صدق<sup>۲</sup> می نامیم که ناظر به صدق در یک تعبیر خاص است.<sup>۳</sup>

باری، تارسکی ابتدا تصمیم می گیرد تا ثوابت (به جز ثوابت منطقی) موجود در هر یک از جمله های زبان مورد بحث خود را فرض کرده، متناظر با هر یک از این ثوابت، متغیری در نظر بگیرد. به این ترتیب با جایگذاری هر متغیر به جای ثوابت نظیر آن در جمله های دستگاه زبانی مورد بحث، همه ی جمله های موجود در این زبان به یک تابع جمله ای تبدیل خواهند شد. حال اگر مجموعه جمله های این زبان مورد بحث را L بنامیم و مجموعه جمله های L پس از جابه جایی با متغیرها (توابع جمله ای حاصل از L) را نیز L' بنامیم، در این صورت دنباله ای<sup>۴</sup> دلخواه از اشیاء که هر یک از توابع جمله ای موجود در دسته L' را ارضاء کند، مدل یا تحقق<sup>۵</sup> از مجموعه جملات L نامیده می شود. حال اگر مجموعه ی L فقط دارای یک جمله یعنی همان X باشد، در این صورت مدل یا تحقق دسته ی L در اینجا همان «مدل جمله ی X خواهد بود. لذا تارسکی به همین سیاق می کوشد تا مفهوم نتیجه ی منطقی را به عنوان مهمترین عنصر درونی یک دستگاه قیاسی به شکل زیر تعریف کند. با داشتن مجموعه ای از جمله ها به نام k و جمله ی مشخصی به نام X که از این مجموعه نتیجه شده است:

1. interpretation

2. model-theoretic truth

3. Hodges, W., "Model Theory", in: *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Available at: [http://plato.stanford.edu/model theory/2010](http://plato.stanford.edu/model%20theory/2010).

4. sequence

5. realization

«جمله‌ی  $x$  نتیجه‌ی منطقی جمله‌های دسته‌ی  $k$  خواهد بود، اگر و فقط اگر هر مدل از دسته‌ی  $k$  مدلی از جمله‌ی  $x$  نیز باشد»<sup>۱</sup>

یا به قول چلاکوفسکی و مالینوفسکی می‌توان بدون استفاده از تعبیر مدل که ممکن است برای خواننده نامأنوس باشد، می‌توان این تعریف را به شکل زیر صورت‌بندی کرد:

« $x$  نتیجه‌ی منطقی جمله‌های دسته‌ی  $k$  خواهد بود، اگر و فقط اگر به ازای هر تعبیری از اصطلاحات غیرمنطقی موجود در جمله‌های دسته‌ی  $k$  و جمله‌ی  $x$  تمام جمله‌های موجود در دسته‌ی  $k$  صادق شدند،  $x$  هم صادق باشد»<sup>۲</sup>

تعریف به دست داده شده تعریفی است معناسناسانه و جامع از مفهوم نتیجه‌ی منطقی، چون: ۱. در قالب این تعریف، نتیجه‌ی منطقی هر جمله‌ی صادق، جمله‌ای صادق است و این منطبق بر همان شهود رایج ریاضیدان‌ها است؛ ۲. بر تمام اقسام استنتاج اعم از قیاسی و استقرایی صدق می‌کند؛ ۳. آن را می‌توان در مورد تمام زبان‌های صوری به کار برد و ۴. با توجه به اینکه ما در اینجا با مفهوم نتیجه‌ی منطقی یا صوری، یعنی با حاصل منطقی رابطه‌ای سروکار داریم که منحصرأ به صورت جمله‌ها مربوط است، لذا چنین رابطه‌ای هیچ‌گاه تحت تأثیر دانش تجربی ما واقع نمی‌شود. یعنی مفهوم نتیجه‌ی منطقی (برآیند رابطه‌ی میان جمله (جمله‌های)  $k$  و نتیجه‌ی  $x$ ) مستقل از دانش ما نسبت به اشیایی است که جمله‌ی  $x$  یا جمله‌های مجموعه‌ی  $k$  بر آنها دلالت دارند و در حقیقت مستقل از خود آن اشیاء است. لذا رابطه‌ی میان مجموعه جمله‌های  $k$  و نتیجه‌ی  $x$  با جابجایی اسامی اشیایی که هر یک از این جمله‌های  $k$  یا  $x$  بر آنها دلالت دارند، دچار هیچ خلل مفهومی یا حتی مصداقی نخواهد شد.

<sup>۱</sup> Tarski, A., "On the Concept of Logical Consequence", P. 417.

<sup>۲</sup> Czelakowski, J., & Grzegorz Malinowski, "Key Notions of Tarski's Methodology of Deductive Systems", p. 321.

## ۶. بررسی چند راه برای تعریف صدق علوم قیاسی

اکنون پروژه‌ی پیش روی ما این است: بررسی امکان ارائه‌ی تعریفی از صدق جملات علوم قیاسی که بر پایه‌ی مفهوم توسعه یافته‌ی نتیجه‌ی منطقی بنا شده باشد. در یک دستگاه یا نظریه‌ی علمی بنا شده به روش قیاسی اصل موضوعی، اساساً با سه دسته از جملات مواجه هستیم: ۱. اصول موضوع دستگاه که سنگ بنای آن را تشکیل می‌دهند، ۲. قضایای استنتاج شده در دستگاه قیاسی که مبنای نهایی آنها همان اصول موضوع دستگاه قیاسی است و بر پایه‌ی آنها اثبات شده‌اند، ۳. جمله‌هایی که با توجه به تعاریف اولیه‌ی دستگاه و با استفاده از مفاهیم اولیه‌ی آن، صورت‌بندی و بیان شده‌اند، ولی نمی‌توان آنها را به مدد اصول موضوع، قواعد صوری برهان و سایر جمله‌ها پیشتر اثبات شده‌ی دستگاه به اثبات رساند. اکنون بررسی صدق جملات علوم و نظریه‌های قیاسی اصل موضوعی به معنای آن است که برای صدق هر سه دسته‌ی بالا تعیین تکلیف شود. اگر بخواهیم صدق این جمله‌ها را بر اساس رفتار اصل موضوعی تبیین کنیم در این مورد می‌توان چنین گفت:

الف. صدق دسته‌ی اول جمله‌های مطرح شده در بالا از پیش فرض شده است، چون صدق اصول موضوع هر دستگاه اصل موضوعی، شرط لازم تأسیس این قبیل دستگاه‌هاست.

ب. دسته‌ی دوم جمله‌های دستگاه قیاسی هم جملاتی هستند که در درون دستگاه و به مدد روش‌های استنتاجی آن اثبات شده‌اند و فعلاً همین قدر می‌دانیم که روند استنتاجی آنها دارای اعتبار نحوی است. اما چگونه می‌توان از این اعتبار نحوی به اعتبار معناشناختی آنها پل زد و صدق آنها را هم تضمین نمود؟ بنا به فرا قضیه‌ی سازگاری که هم در منطق جمله‌ها و هم در منطق محمول‌ها برقرار است، چنین داریم:

«اگر جمله‌ای نتیجه‌ی صوری مجموعه‌ای از جملات دیگر باشد،

نتیجه‌ی معنایی آنها هم خواهد بود»

لذا می‌توان چنین نتیجه گرفت که در یک دستگاه قیاسی اصل موضوعی، اعتبار نحوی یک استنتاج، به اعتبار معناشناختی آن و در نتیجه صدق آن منجر

می‌شود. در نتیجه دسته‌ی دوم جملات یک دستگاه قیاسی هم صادق‌اند. ج. اما دسته‌ی سوم جملات دستگاه قیاسی ما از همه مسأله‌دارتر است. با توجه به اینکه تکلیف صدق جملات دسته‌ی اول و دوم یک دستگاه قیاسی مشخص شده است، پردازش‌های بعدی ما اغلب در حوزه‌ی صدق سومین دسته از جملات دستگاه‌های قیاسی شکل خواهد گرفت.

یک راه مواجهه با دسته‌ی سوم این است که اصولاً آنها را نادیده بینگاریم و با توجه به اینکه در درون دستگاه قیاسی ما اثبات نشده‌اند، اساساً عضویت آنها را در این قبیل دستگاه‌ها انکار کنیم. اما مسأله این است که اگر چه این جملات در درون دستگاه قیاسی اثبات نشده‌اند، اما بالأخره با استفاده از مفاهیم اولیه‌ی این قبیل دستگاه‌ها صورت‌بندی و بیان شده‌اند. حتی اگر نتوانیم آنها را بر پایه‌ی اصول موضوع دستگاه و دیگر جملات استنتاج شده‌ی دستگاه استنتاج یا اثبات کنیم، اما بالأخره داوری در باب صدق و کذب آنها امری اجتناب‌ناپذیر است.

گاهی با این پرسش فرعی مواجه‌ایم که با توجه به اینکه اغلب جملات دستگاه‌های قیاسی بر پایه‌ی اثبات در درون دستگاه در آن به وجود آمده‌اند، جملات غیرقابل اثبات در این دستگاه‌ها بر اساس کدام سابقه و ایده‌ی ذهنی صورت‌بندی می‌شوند؟ در مقام امکان‌سنجی در باب منشأ این قبیل جملات، دو احتمال عمده وجود دارد:

۱. گاهی یک دستگاه اصل موضوعی بر اساس یک مجموعه جملات دستگاه علمی بیرونی غیرمنقح مانند یک دستگاه هندسی غیرمنقح که هنوز اصل موضوعی نشده است، ساخته می‌شود تا آن علم یا شاخه‌ی علمی و نظری را به نحو منقح و بر پایه‌ی اصول موضوع مشخصی از نو بسازند، با این هدف که تمام اظهارات و جملات درون آن را به اظهارات و جملاتی بر پایه‌ی یک سلسله اصول موضوع مشخص تبدیل کنند. در این حالت، صورت‌بندی جملاتی که معنا و مفهوم مشخصی افاده کنند، اما در درون دستگاه نمی‌توان آنها را اثبات نمود، قابل تصور و پذیرفتنی است. مدعیاتی مانند اینکه «مجموع زوایای داخلی یک مثلث برابر با ۱۸۰ درجه است»، در یک

دستگاه اصل موضوعی صوری می‌توانند از این سنخ ظاهر شوند که به لحاظ شهودی تردید درباره‌ی آنها روا نیست، اما قابل اثبات هم نیستند.

۲. اما گاهی در حال تأسیس یک دستگاه اصل موضوعی بر پایه‌ی اصول موضوع مشخص و بدون توجه به هیچ نمونه‌ی خارجی یا غیر اصل موضوعی هستیم. در این حالت و به نحو مجرد از خارج هم امکان صورت‌بندی جملاتی هست که دریافت شهودی اهالی منطق و ریاضی آنها را صادق به حساب می‌آورد، اما نمی‌توان آنها را بر پایه‌ی اصول موضوع و قواعد استنتاجی دستگاه اثبات کرد و باید در صدد تحقیق صدق آنها برآییم. آزمون و خطای ما در قسمت بعدی این پژوهش، تلاشی است برای تعیین تکلیف صدق دسته‌ی سوم از جملات دستگاه‌های قیاسی.

#### ۶-۱. توسعه‌ی همدلانه‌ی یک تعریف

در اینجا می‌خواهیم با دست زدن به آزمون و خطایی برای صدق‌نگاری دسته‌ی سوم جملات موجود در یک دستگاه قیاسی، به عنوان دسته‌ای از جملات دستگاه قیاسی که با بیشترین مشکل مواجه است، پرونده‌ی صدق هر سه دسته‌ی جملات دستگاه قیاسی را به فرجام برسانیم. پس از آزمون یکی- دو راه حل، راه نهایی ما مبتنی خواهد بود بر به کارگیری و استفاده از تعریف تارسکی از مفهوم نتیجه‌ی منطقی برای تعیین تکلیف نهایی صدق جملات دستگاه قیاسی.

روش اول برای تحقیق صدق این قبیل جملات و مشکل پیش روی آن. این ماجرا که احکام و جملات صادقی در هر نظریه‌ی صوری اصل موضوعی وجود دارند که صرفاً بر اساس مفاهیم قبلی منطق و مفاهیم اولیه‌ی دستگاه اصل موضوعی در دست ساخت ما صورت‌بندی و بیان شده‌اند، اما در عین حال نمی‌توان آنها را با استفاده از اصول موضوع و قواعد استنتاجی دستگاه اثبات نمود، یکی از پی‌آمدهای بدیهی و پیش‌بینی شده در کشفیات گودل است. این امر نوعی محدودیت اصل موضوعی در این قبیل دستگاه‌ها به حساب می‌آید که با اصلاح سیستم اصول موضوع دستگاه قیاسی می‌توان بر آن غلبه کرد.

راه حلی که صرفاً سرخط کلی آن در انتهای مقاله‌ی «صدق و برهان»

تارسکی عرضه شده، این است که برای برداشتن فاصله‌ی میان مجموعه جملات صادق فرض شده و مجموعه جملات اثبات‌پذیر دستگاه‌های اصل موضوعی باید اصول موضوع جدید، مفاهیم اولیه‌ی جدید یا قواعد برهان جدیدی را به مجموعه‌ی اصول موضوع دستگاه بیفزاییم تا به کمک آنها بتوان آن دسته از جملات صورت‌بندی شده در درون دستگاه را که صادق هم به نظر می‌رسند، اثبات کرد. ارائه‌ی این راه حل ناشی از این اعتقاد است که بخشی از مشکل اثبات‌ناپذیر بودن تعدادی از جملات صادق دستگاه اصل موضوعی ما به ناکافی بودن اصول موضوع یا احتمالاً قواعد استنتاجی دستگاه باز می‌گردد.<sup>۱</sup> اما اهتمام به این راه حل با چالش جدیدی مواجه است. درست است که با افزودن تعدادی اصل موضوع یا مفهوم اولیه<sup>۲</sup> یا حتی قواعد برهان ممکن است بتوان تعدادی از جمله‌های صورت‌بندی شده اما اثبات ناشده‌ی دستگاه را در درون آن اثبات نمود، اما خود این اصول موضوع، مفاهیم اولیه یا قواعد جدید برهان منجر به صورت‌بندی جملات جدیدی می‌شوند که فقط تعدادی از آنها را می‌توان اثبات نمود و باز هم در میان آنها جملاتی یافت می‌شود که صادق اما اثبات‌ناپذیرند.

لذا هر چند بار هم که این فرایند ترمیم مفاهیم اولیه، اصول موضوع و قواعد استنتاجی دستگاه طی شود، باز هم جملاتی در دستگاه خواهیم داشت که صادق فرض شده‌اند، اما اثبات‌ناپذیرند. لذا این راه اگر چه راهی است که یکسره در درون دستگاه اصل موضوعی ما طی می‌شود، اما به مطلوب مورد نظر یعنی اثبات برهانی تمام جملات صوری دستگاه منجر نخواهد شد. یعنی مجموعه جملات اثبات‌پذیر دستگاه اصل موضوعی ما به طور حدی به مجموعه جملات صادق آن نزدیک خواهد شد، اما مطلوب نهایی ما مبنی بر انطباق کامل مجموعه جملات صادق و مجموعه جملات اثبات‌پذیر دستگاه حاصل نخواهد شد. لذا باید روشی دیگر را بیازماییم.

روش دیگر برای تحقیق صدق این قبیل جمله‌ها و مشکل پیش روی آن.

<sup>۱</sup> ناگل، ارنست، جیمز نیومن و آلفرد تارسکی، برهان گودل و حقیقت و برهان، ص ۱۴۲.

<sup>۲</sup> primitive terms



اکنون و در مقام تحقیق صدق این قبیل جمله‌ها دستگاه‌های قیاسی، ظاهراً تنها راهی که باقی می‌ماند این است که صدق این دسته از جملات را به مدد روش‌های صدق‌پژوهی تارسکی و به عنوان جملاتی منطقی و خارج از دستگاه‌های قیاسی تحقیق کنیم. اما یک مشکل بر سر راه ماست و آن هم هنگامی است که صدق جمله‌ای از دسته‌ی سوم جملات دستگاه قیاسی ما به مدد روش‌های صدق‌پژوهی تارسکی و به عنوان جمله‌ای خارج از دستگاه قیاسی، تحقیق شود و اتفاقاً این جمله هم صادق از آب دربیاید. با توجه به اینکه در بحث اعتبار نحوی و اعتبار معناشناختی دیدیم که نتیجه‌ی معنایی بودن یک جمله متناظر با صدق آن است، این امر بدان معناست که آن جمله‌ی صادق را می‌توان به عنوان نتیجه‌ی معنایی دستگاه اصل موضوعی‌ای دانست که این جمله در آن صورت‌بندی (نه اثبات) شده است. اکنون با توجه به *فراقضیه‌ی تمامیت منطقی* محمولها و منطقی جمله‌ها که می‌گوید:

«هر نتیجه‌ی معنایی، نتیجه‌ی صوری هم هست»

می‌توان چنین گفت که این جمله می‌تواند نتیجه‌ی صوری آن دستگاه اصل موضوعی و لذا قابل اثبات در آن باشد. یعنی با وجود آنکه تاکنون نتوانسته‌ایم آن جمله را در دستگاه به اثبات برسانیم، اما این نتیجه مبنی بر قابل اثبات بودن جمله‌ی مورد بحث در جای خود چشمگیر، قابل توجه و البته تناقض‌آمیز است. یکی از وجوه مشکل پیش آمده این است که به این وسیله، این جمله به جمله‌ای تمیزپذیر در دستگاه اصل موضوعی ما تبدیل شده است، درحالی که تاکنون این قبیل جملات صورت‌بندی شده - و در عین حال اثبات نشده - در دستگاه اصل موضوعی را جزء جملات تمیزناپذیر دستگاه می‌پنداشتیم و این با فرض ناشی از قضیه‌ی ناتمامیت گودل که قضیه‌ای اثبات شده در درون منطقی است، منافات دارد.

جدای از این قبیل تناقضات، مهمترین مشکل بر سر راه این روش برای تعیین صدق و کذب دسته‌ی سوم جملات دستگاه‌های قیاسی این است که در این روش، بررسی صدق جملات دستگاه قیاسی به خارج از آن منتقل می‌شود. در حالی که یکی از محاسن روش اصل موضوعی در دستگاه‌های قیاسی، تأکید صرف بر اصول موضوع و روش‌های استنتاجی خود دستگاه و نادیده گرفتن روش‌ها و امکاناتی

است که ممکن است در خارج از دستگاه وجود داشته باشند. روش سوم برای تحقیق صدق این قبیل جملات. این روش برای تحقیق صدق دسته‌ی سوم جملات دستگاه قیاسی مبتنی است بر مفهوم نتیجه‌ی منطقی از دیدگاه وی. پیشتر هم در بررسی مقاله‌ی درباره‌ی مفهوم نتیجه‌ی منطقی تارسکی دیدیم که:

«جمله‌ی  $x$  نتیجه‌ی منطقی جمله‌های دسته‌ی  $k$  است، اگر و فقط اگر هر مدل از دسته‌ی  $k$  مدلی از جمله‌ی  $x$  نیز باشد»<sup>۱</sup>

اکنون برای تعیین تکلیف صدق دسته‌ی سوم جملات دستگاه‌های قیاسی اصل موضوعی که در درون دستگاه صورت‌بندی و بیان شده‌اند، اما نتوانسته‌ایم آنها را بر پایه‌ی اصول موضوع و روش‌های موجود دستگاه اثبات کنیم، تنها راه پیش رو بهره‌برداری مقتضی از مفهوم نتیجه‌ی منطقی و تبیین صدق این قبیل جملات دستگاه قیاسی است. فراموش نکرده‌ایم که تمام تأکید ما این است که مسأله‌ی صدق این قبیل جملات در درون خود دستگاه اصل موضوعی و به نوعی صرفاً با دخالت اصول موضوع و مفاهیم اولیه‌ی دستگاه انجام شود. به همین دلیل است که به تعریف صدق این دسته از جملات بر پایه‌ی مفهوم نتیجه‌ی منطقی از دیدگاه تارسکی روی آورده‌ایم.

به این ترتیب اگر جمله‌ی صورت‌بندی شده، اما اثبات نشده‌ی دستگاه قیاسی را  $X$  بنامیم، هدف ما این است که به نحوی نشان دهیم که این جمله، نتیجه‌ی منطقی دستگاه به همان معنایی است که در بالا گفته شد. اما این جمله اثبات نشده است و لذا نمی‌توان مقدماتی برای آن در نظر گرفت تا در مجموعه‌ی  $k$  قرار داده شوند. در اینجا به سراغ مقدمات اساسی دستگاه اصل موضوعی یعنی همان اصول موضوع آن رفته، این اصول موضوع را به عنوان جملات عضو مجموعه‌ی  $k$  در نظر می‌گیریم. لذا در تعریف نتیجه‌ی منطقی خواهیم داشت:

«جمله‌ی (اثبات نشده‌ی)  $x$  نتیجه‌ی منطقی اصول موضوع دستگاه است، اگر و فقط

<sup>۱</sup> Tarski, A., "On the Concept of Logical Consequence", p. 417.

اگر هر مدل از اصول موضوع دستگاه مدلی از جمله  $x$  نیز باشد»

بدیهی است که اگر جمله  $x$  پس از این آزمون به عنوان نتیجه منطقی اصول موضوع دستگاه اصل موضوعی مورد بحث شناخته شود، به همان سیاقی که قبلاً گفتیم و بر اساس فراقضیه سازگاری مبنی بر اینکه:

«اگر جمله ای نتیجه صوری مجموعه ای از جملات دیگر باشد، نتیجه

معنایی آنها هم خواهد بود»

جمله ای صادق از دستگاه اصل موضوعی ما خواهد بود.

به این ترتیب و بر پایه روش بالا برای تحقیق صدق دسته سوم از جملات دستگاه قیاسی چرخه تحقیق صدق تمام جملات دستگاه در درون خود دستگاه تکمیل می شود و با ادغام تعریف تعمیم یافته نتیجه منطقی برای دسته سوم جملات دستگاه قیاسی با فراقضیه سازگاری به نتیجه کلیدی زیر می رسیم:

«جمله  $x$  جمله ای صادق از دستگاه قیاسی است، اگر و فقط اگر هر مدل از

اصول موضوع دستگاه، مدلی از جمله  $x$  نیز باشد»

جمع بندی میانی ما این است که تاکنون با دو تقریر یا تعریف از مفهوم نتیجه منطقی در دستگاه های اصل موضوعی مواجه شده ایم که دومی عام تر از دیگری است. تقریر اولیه از نتیجه، تقریری است که بر پایه براهین قیاسی بنا شده است و در آن جمله ای را نتیجه منطقی مجموعه ای از جملات می دانستیم که صرفاً به واسطه روش های استنتاج قیاسی به دست آمده باشد. اما تعریف اخیر تارسکی از این مفهوم که تعریفی مدل محور و توسعه یافته است، نشان داد که علاوه بر روش های قیاسی برای استخراج یک نتیجه منطقی از مجموعه ای از جملات می توان به روش های استقرایی هم برای به دست دادن یک نتیجه منطقی صادق امیدوار بود. اگر چه سطح استفاده از آن در دستگاه های قیاسی بسیار کمتر از خود روش استنتاج قیاسی است. لذا اگر جمله ای در درون دستگاه اصل موضوعی ما صورت بندی شده، اما به مدد روش های قیاسی دستگاه نتوان راهی برای اثبات آن پیدا کرد، این امید باقی است که بتوان نتیجه منطقی بودن و در نتیجه صدق آن را به مدد این تعریف

جدید از مفهوم نتیجه‌ی منطقی به کرسی نشاند. جالب است که تارسکی در کتاب *منطق و روش‌شناسی علوم قیاسی* خود این روش توسعه یافته برای رسیدن به نتیجه‌ی منطقی را به وضوح، روشی برهانی می‌داند و آنرا برهان به واسطه‌ی تعبیر<sup>۱</sup> می‌نامد.<sup>۲</sup> اما اگر جمله‌ی صورت‌بندی شده بر حسب مفاهیم دستگاه اصل موضوعی را نه بتوان به روش‌های استنتاجی دستگاه اثبات کرد و نه از آزمون تعریف نتیجه‌ی منطقی بالا جان سالم به در برد، در این صورت می‌توان اطمینان داشت که این جمله نتیجه‌ی منطقی اصول موضوع دستگاه مورد بحث نیست و لذا نمی‌توان آن را در این دستگاه صادق خواند، در غیر این صورت با تناقض روبه‌رو خواهیم شد.

#### ۶-۲. مثالی از صدق‌نگاری بر پایه‌ی مفهوم نتیجه‌ی منطقی

اکنون به جد نیازمند آن هستیم تا با ارائه‌ی مثالی دقیق برای تعریف پیشنهادی خود، ذهن خواننده را درباره‌ی آن روشن کنیم. تلاش ما در بیان این مثال آن است که تمام مفاهیم نظری مطرح در مباحث بالا را پوشش دهد و بتوان از آن به عنوان پلی میان مفهوم مدل محور نتیجه‌ی منطقی و صدق جملات دستگاه‌های قیاسی اصل موضوعی، به خصوص دسته‌ی سوم جملات این دستگاه‌ها بهره‌برداری کرد.<sup>۳</sup> پیش از طرح این مثال، امیدوارم خواننده در هنگام مطالعه‌ی این مثال توجه داشته باشد که:

اولاً. تمام بحث ما در درون دستگاه‌های قیاسی اصل موضوعی جریان دارد نه سیستم‌های باز<sup>۴</sup> و شهودی ریاضی،

<sup>۱</sup> proof by interpretation

<sup>۲</sup> نک:

Tarski, A., "On the Concept of Logical Consequence", p. 416 .

<sup>۳</sup> برای ملاحظه‌ی اصل مثال تارسکی که در اینجا متناسب با نیاز بحث، تغییراتی در آن داده‌ایم، نک:

Tarski, A., *Introduction to Logic and to the Methodology of the Deductive Sciences*, pp. 112-114.

<sup>۴</sup> مراد ما از سیستم‌های باز ریاضی، نقطه‌ی مقابل دستگاه‌های قیاسی است که بر پایه‌ی اصول موضوع منقح، بیان شده و متناهی شکل نگرفته‌اند.

ثانیاً. جمله  $X$  که می‌خواهیم نتیجه‌ی منطقی بودن آن را در درون یک دستگاه قیاسی اصل موضوعی به کرسی بنشانیم، در درون این دستگاه برهانی نشده است یا به عبارت بهتر جزء آن دسته از جملات این قبیل دستگاه‌هاست که مشمول اصل ناتمامیت گودل است و امکان تدوین برهان قیاسی برای آن فراهم نیست.

اکنون فرض کنید که بخواهیم مبحث تشابه پاره‌خط‌های هندسی را در قالب یک نظریه‌ی قیاسی بازسازی کنیم. در ساختن این دستگاه کوچک قیاسی، گام اول این است که مفاهیم اولیه و اصول موضوعی را برای آن برگزینیم. متغیرهای  $X$ ،  $Y$ ،  $Z$  و... را دالّ بر هر یک از پاره‌خط‌ها و دو نماد  $S$  و  $\cong$  را هم به عنوان مفاهیم اولیه‌ی دستگاه در نظر می‌گیریم. مراد از  $S$  مجموعه‌ی تمام پاره‌خط‌ها و نماد  $\cong$  هم برای بیان رابطه‌ی تشابه میان پاره‌خط‌هاست. لذا فرمول  $X \cong Y$  را این‌گونه می‌خوانیم: پاره‌خط‌های  $X$  و  $Y$  با یکدیگر متشابه‌اند. علاوه بر این دو اصل موضوع زیر را هم به عنوان اصول موضوع دستگاه در دست ساخت خود در نظر می‌گیریم:

اصل موضوع ۱. در مورد هر عضو  $X$  از مجموعه‌ی  $S$  می‌توان گفت:  $X \cong X$  (هر پاره‌خط با خودش متشابه است)،

اصل موضوع ۲. در مورد هر یک از عضوهای  $X$ ،  $Y$  و  $Z$  از مجموعه‌ی  $S$ ، اگر  $X \cong Z$  و  $Y \cong Z$ ، آنگاه  $X \cong Y$  (دو پاره‌خط متشابه با یک پاره‌خط سوم، خودشان نیز با یکدیگر متشابه‌اند).

مسئله است که دانش ما درباره‌ی ویژگی‌های مفاهیم اولیه‌ی دستگاه یعنی همان پاره‌خط‌ها و تشابه میان آنها بسیار گسترده است و به هیچ وجه در حدّ اصول موضوعی که آنها را انتخاب کرده‌ایم، تنزّل نمی‌یابد. اما بر پایه‌ی آنچه برای بنیانگذاری یک دستگاه اصل موضوعی از نگاه تارسکی آموخته‌ایم، این دانش، امری شخصی است و نباید کمترین تأثیری هم در ساختن این نظریه‌ی قیاسی داشته باشد. لذا منحصراً با استفاده از همین اصول موضوع و قواعد استنتاج قیاسی است که مجازیم تا جملات دیگری در درون دستگاه اثبات کنیم (قضایا). مثلاً دو قضیه‌ی زیر نمونه‌ی قضایایی هستند که بر پایه‌ی اصول موضوع دستگاه و قواعد استنتاج قیاسی نتیجه‌گیری (اثبات) شده‌اند و با توجه به ملاحظات قبلی ما ذیل دسته‌ی دوم جملات

یک دستگاه قیاسی می‌گنجند.

قضیه‌ی ۱. در مورد هر یک از عضوهای  $Y$  و  $Z$  از مجموعه‌ی  $S$  اگر  $y \cong z$  آنگاه  $z \cong y$ .  
 قضیه‌ی ۲. در مورد هر یک از عضوهای  $x$ ،  $Y$  و  $Z$  از مجموعه‌ی  $S$  اگر  $x \cong y$  و  $y \cong z$  آنگاه  $x \cong z$ .

برهان‌های این دو قضیه بسیار ساده‌اند. مثلاً اگر بخواهیم برهانی برای قضیه‌ی اول اقامه کنیم، با قرار دادن  $Z$  به جای  $x$  در اصل موضوع ۲ جمله‌ی زیر به دست می‌آید: در مورد هر یک از عضوهای  $Z$  و  $Y$  از مجموعه‌ی  $S$  اگر  $z \cong z$  و  $y \cong z$ ، آنگاه  $z \cong y$ . اما در فرض جمله‌ی بالا داریم:  $z \cong z$  که بی‌تردید بر اساس اصل موضوع ۱ معتبر است و لذا می‌توان آن را کنار گذاشت. لذا با کنار گذاشتن آن به نتیجه‌ی زیر می‌رسیم:

در مورد هر یک از عضوهای  $Y$  و  $Z$  از مجموعه‌ی  $S$  اگر  $y \cong z$  آنگاه  $z \cong y$ .  
 به این ترتیب قضیه‌ی ۱ اثبات شده است.

توجه دارید که در این مثال، دانش برون - دستگاهی خود یعنی دانش قبلی‌مان درباره‌ی تشابه پاره‌خط‌های هندسی را کنار گذاشته‌ایم و رفتار اصل موضوعی ما ایجاد کرده که فقط مدّعیاتی در این باره معتبر باشند که در درون دستگاه اصل موضوعی صورت‌بندی یا اثبات شده‌اند. این رفتار از نگاه تارسکی یک وجه صوری هم دارد و آن هم این است که ما در استنتاج قضایا از اصول موضوع، به گونه‌ای رفتار می‌کنیم که گویی فراتر از محتوای صریح اصول موضوع یا مفاهیم اولیه‌ی دستگاه، مضمون مفاهیم خفته در فرضیات و مقدمات اثباتی جملات دستگاه را نمی‌فهمیم. این امر به این معناست که تمام توجه ما منحصراً به «صورت» اصول موضوع یا مفاهیم اولیه‌ی دستگاه معطوف است.

اکنون هم در چارچوب این رفتار صوری و مقتضیات برآمده از آن می‌توان نتایج جالبی گرفت که ما را در درک مفهوم توسعه یافته‌ی نتیجه‌ی منطقی تارسکی یاری می‌کند. فرض کنید در تمام اصول موضوع و قضایای شکل گرفته در نظریه‌ی اصل موضوعی خود، مفاهیم اولیه‌ی دستگاه یعنی  $S$  و  $\cong$  را با متغیرهایی جابجا کنیم

که هر یک دالّ بر موضوعات مشخصی هستند. مثلاً به جای نماد  $S$  متغیّر  $K$  را برای دلالت بر دسته‌ها و به جای نماد  $\equiv$  هم متغیّر  $R$  را برای نشان دادن روابط میان دسته‌ها قرار دهیم. به این ترتیب جملات نظریه‌ی اصل موضوعی اصلی ما (اعم از اصول موضوع و قضایای آن) به توابع جمله‌ای تبدیل خواهند شد که شامل دو متغیّر آزاد  $K$  و  $R$  هستند و روابطی را میان  $K$  و  $R$  بیان می‌کنند. دقتی که تارسکی در اینجا به خرج می‌دهد این است که تمام تعاریف و قضایایی که در بردارنده‌ی مفاهیم تعریف شده‌ی بخصوصی هستند را نادیده می‌گیرد.

به این ترتیب اصول موضوع شکل گرفته در بالا به صورت توابع جمله‌ای زیر در می‌آیند که به خودی خود معنای مشخصی افاده نمی‌کنند، بلکه روابطی را میان تعدادی از متغیّرهای دسته‌ی  $K$  بیان می‌کنند:

اصل موضوع  $1_R$ . در مورد هر عضو  $X$  از دسته‌ی  $K$  می‌توان گفت:  $xRx$  (رابطه‌ی  $R$  در دسته‌ی  $K$  دارای خاصیت انعکاسی است)،

اصل موضوع  $2_R$ . در مورد هر یک از عضوهای  $x$ ،  $y$  و  $z$  از دسته‌ی  $K$ ، اگر  $xRz$  و  $yRz$ ، آنگاه  $xRy$  (نام این ویژگی را هم  $P$  می‌گذاریم)،

اکنون اگر همین جابجایی مفاهیم اولیه‌ی دستگاه با متغیّرهای  $K$  و  $R$  در براهین منتهی به قضایای دستگاه اصل موضوعی ما اتفاق بیفتد، قضایای دستگاه اصل موضوعی اصلی هم به همین ترتیب به توابع جمله‌ای قابل استنتاجی تبدیل می‌شوند که به صورت کلی و به همان نحو می‌توانند بر پایه‌ی توابع جمله‌ای ناشی از اصول موضوع دستگاه اثبات شوند. لذا بر پایه‌ی توابع جمله‌ای بالا به نام  $1_R$  و  $2_R$  دو تابع جمله‌ای زیر به دست می‌آیند:

قضیه‌ی  $1_R$ . در مورد هر یک از عضوهای  $y$  و  $z$  از دسته‌ی  $K$  اگر  $yRz$  آنگاه  $zRy$  (رابطه‌ی  $R$  در دسته‌ی  $K$  دارای خاصیت تقارنی است)،

قضیه‌ی  $2_R$ . در مورد هر یک از عضوهای  $x$ ،  $y$  و  $z$  از دسته‌ی  $K$  اگر  $xRy$  و  $yRz$  آنگاه  $xRz$  (رابطه‌ی  $R$  در دسته‌ی  $K$  متعدّی است).

حال با توابع جمله‌ای سروکار داریم که رابطه‌ی استنتاجی میان آنها هم بر پایه‌ی قواعد استنتاجی منطقی قیاسی شکل گرفته است، نه با جملات خاصی

درباره‌ی پاره‌خطها و رابطه‌ی تشابه میان آنها. پس می‌توان بر پایه‌ی چهار تابع جمله‌ای اخیر قوانین عامی را ساماندهی و بیان کرد که صرفاً به منطق تعلق دارند، نه به هیچ نظریه‌ی خاصی درباره‌ی پاره‌خطها و مانند اینها. این مطلب هم بازتابی از یک اصل اولیه‌ی مهم در تأسیس دستگاه‌های قیاسی است که بنا بر آن، منطق جدید، تنها دستگاه قیاسی مقدم بر هر دستگاه قیاسی دیگر است.<sup>۱</sup>

**قانون منطقی ۱.** هر رابطه‌ی  $R$  در هر دسته‌ی  $K$  که هم انعکاسی باشد و هم ویژگی  $P$  را داشته باشد، در همان دسته‌ی  $K$  تقارنی هم خواهد بود،

**قانون منطقی ۲.** هر رابطه‌ی  $R$  در هر دسته‌ی  $K$  که هم انعکاسی باشد و هم ویژگی  $P$  را داشته باشد، در همان دسته‌ی  $K$  متعدی هم خواهد بود،

و این دو قانون دو ویژگی شناخته شده از رابطه‌های منطقی هستند.

#### ۶-۲-۱. نمونه‌ای از مفاهیم مدل و تعبیر در این مثال

آنچه در سطرهای اخیر رخ داد این بود که مفاهیم اولیه‌ی دستگاه اصل موضوعی را برداشتیم و به جای آنها دو متغیر  $K$  و  $R$  را گذاشتیم. حال اگر رابطه‌ی  $R$  داشته باشیم که در یک دسته‌ی  $K$  هم انعکاسی باشد و هم ویژگی  $P$  را داشته باشد (توابع جمله‌ای برآمده از اصول موضوع دستگاه قیاسی هندسی را ارضاء کند)  $K$  و  $R$  را با هم، مدل یا تحقق‌ی از دستگاه قیاسی هندسی ساخته شده می‌نامیم؛ به این معنا که این مدل، مدلی از اصول موضوع آن دستگاه هندسی، قضایای استنتاج شده‌ی درون آن و براهین منتهی به این قضایا است. لذا مدعی کلی ما این است که هر مدل از اصول موضوع یک دستگاه قیاسی خاص، مدلی از کل آن دستگاه قیاسی است.

اما مسلّم است که مدل‌های گوناگونی را می‌توان برای سیستم اصل موضوعی اولیه (هندسی) برپا کرد. اکنون اگر به جای متغیرهای  $R$  و  $K$  دو رابطه‌ی خاصی به نام  $I$  و دسته‌ی خاصی به نام  $k$  بگذاریم، دستگاه قیاسی جدیدی حاصل

<sup>۱</sup> برای آگاهی بیشتر در این باره نک:

بهنیافر، تعبیر صدق در علوم قیاسی بر اساس نظریه صدق تارسکی، صص ۱۶۰-۱۵۹.



می شود که اصول موضوع و قضایایی متناظر با اصول موضوع و قضایای همان دستگاه قیاسی هندسی (اولیه‌ی) ما دارد و بدون اقامه‌ی برهان مجدد برای قضایای دستگاه قیاسی جدیدمان می توانیم آنها را صادق بدانیم. لذا چنین گفته می شود که دستگاه قیاسی جدید ما یک «تعبیر» از آن دستگاه قیاسی هندسی اولیه است. آنچه که پیشتر در هنگام بیان مراحل تأسیس یک دستگاه قیاسی با عنوان قانون قیاسی شناختیم هم برآیند و بازتابی از همین ویژگی بیان شده در دستگاه‌های قیاسی است.

در اینجا باید به نکته‌ی مهمی توجه کرد و آن هم این است که تارسکی اقدام به بازتعبیر مستقیم مفاهیم اولیه‌ی یک دستگاه قیاسی و تبدیل آن به دستگاه قیاسی دیگر نکرده است. یعنی چنین نیست که مفاهیم اولیه‌ی یک دستگاه قیاسی خاص را بردارد و مستقیماً به جای آن مفاهیم اولیه‌ی دیگری را بگذارد. بلکه برای یافتن تعبیر دیگری از یک دستگاه قیاسی در درون علوم مورد نظر خود، ابتدا مفاهیم اولیه‌ی دستگاه قیاسی را برداشته، سپس متغیرهایی به جای آنها گذاشته است تا جمله‌های دستگاه خاص هندسی ما به شکل توابع جمله‌ای درآیند و بعداً در مرحله‌ی آخر برای یافتن تعبیر مورد نظر خود، مفاهیم اولیه‌ی دیگری را به جای متغیرهای آن توابع جمله‌ای قرار داده است. این شیوه‌ی عملکرد تارسکی در بازتعبیر غیرمستقیم به جای بازتعبیر مستقیم مفاهیم اولیه‌ی یک دستگاه قیاسی برای یافتن تعبیری از آن دستگاه در علوم مختلف هم احتمالاً به دلیل تعالیم معناشناسانه‌ی لسینیفسکی است که با توجه به برخی نزاع‌های میان فرگه و هیلبرت، بازتعبیر مستقیم نمادها (روش نحوی محض هیلبرت) را به منظور یافتن تعبیر جدیدی از جمله‌ها، روش ریاضی قابل قبولی نمی دانست. لذا تارسکی یک مرحله به میان کار افزود که عبارت است از جایگذاری متغیرهایی به جای مفاهیم اولیه‌ی دستگاه و سپس به دست آوردن تعبیرهای مختلف نظریه‌ی قیاسی مورد بحث.<sup>۱</sup> بر همین اساس می توان تعبیر مختلفی از دستگاه قیاسی اولیه‌ی مطرح شده در بالا در دامنه‌ی منطق یا علم حساب و مانند اینها ایجاد کرد که در اینجا مجالی برای پرداختن به

---

<sup>۱</sup> این نکته از لابه‌لای راهنمایی‌های ویلفرد هاجز در پاسخ به برخی سئوالات نگارنده استخراج شده است.

جزئیات آنها نیست.

### ۶-۲-۲. نمونه‌ای از صدق مبتنی بر مفهوم نتیجه‌ی منطقی در این مثال

جدای از مثال‌های فوق، اکنون اگر به دستگاه قیاسی هندسی اولیه بازگردیم، مسلماً با استفاده از مفاهیم اولیه‌ی این دستگاه و مفاهیم پایه‌ی منطقی آن می‌توان جمله‌هایی را صورت‌بندی و بیان کرد که قابل اثبات نیستند یا حداقل با امکانات شناخته شده و فعلی ما در درون دستگاه، قابلیت اثبات آنها وجود ندارد. جمله‌ی زیر مثالی از این نوع جملات است:

\*. دو عضو  $X$  و  $Y$  در مجموعه‌ی  $S$  می‌توان یافت که در مورد آنها  $X \equiv Y$  برقرار نیست (دست‌کم دو پاره‌خط در مجموعه‌ی  $S$  وجود دارند که با هم متشابه نباشند)

جمله‌ی \* جمله‌ای است که صرفاً بر اساس مفاهیم اولیه‌ی دستگاه قیاسی ما صورت‌بندی و بیان شده است و ظاهراً به نحو شهودی هم صادق به نظر می‌رسد. اما هر تلاش اصل موضوعی در درون دستگاه قیاسی اولیه‌ی ما برای اثبات آن بر اساس اصول موضوع و سایر قضایای استنتاج شده در درون دستگاه نافرجام است.

به این ترتیب دستگاه قیاسی هندسی ما نمونه‌هایی از هر سه دسته جمله‌های یک دستگاه قیاسی را دارا است. هم اصول موضوعی دارد که جزء دسته‌ی اول جمله‌های دستگاه قیاسی قرار می‌گیرند و صدق آنها از پیش، فرض شده است (اصول موضوع ۱ و ۲)؛ هم قضایای اثبات شده‌ای دارد که جزء دسته‌ی دوم جملات دستگاه قیاسی قرار می‌گیرند و صدق آنها را در جای خود بررسی کردیم (قضایای ۱ و ۲)؛ هم اینکه جملات صورت‌بندی شده‌ای بر پایه‌ی مفاهیم اولیه‌ی دستگاه دارد که به دلیل آنکه در درون دستگاه قابل اثبات نیستند، احتمالاً جزء دسته‌ی سوم جمله‌های دستگاه قیاسی قرار می‌گیرند.

اکنون مسأله این است که بنا بر تعمیمی که در تعریف مفهوم نتیجه‌ی منطقی به دست دادیم، می‌توان چنین گفت که جمله‌ی \*، به عنوان یکی از جملات موجود در دسته‌ی سوم جملات، نتیجه‌ی منطقی اصول موضوع دستگاه است، اگر و

فقط اگر هر مدل از اصول موضوع دستگاه، مدلی از جمله‌ی \* نیز باشد. به عبارت بهتر تا زمانی که مدلی از اصول موضوع دستگاه قیاسی یافت نشده باشد، که مدلی از جمله‌ی \* نباشد، این جمله نتیجه‌ی منطقی اصول موضوع دستگاه قیاسی مورد بحث ما خواهد بود. سپس اگر احراز شود که این جمله نتیجه‌ی منطقی اصول موضوع دستگاه است، بر اساس مکانیسمی که پیش از طرح این مثال پیشنهاد کرده‌ایم، می‌توان در مورد صدق این جمله هم به نتیجه‌ی قطعی رسید و دریافت شهودی ریاضی گفته شده مبنی بر صدق جمله‌ی \* را تأیید کرد، در غیر این صورت این جمله صادق نخواهد بود.

اگر چه روش کنونی ما برای احراز اینکه جمله‌ای نتیجه‌ی منطقی مجموعه‌ی مشخصی از جملات، مثلاً مجموعه‌ای از اصول موضوع، هست یا نه، متفاوت از روش مدل یابی تارسکی در بخشی از کتاب منطق و روش‌شناسی اوست، اما می‌توان به سیاق او روش گفته شده در بالا را هم روشی برهانی به حساب آورد و آن را «برهان به واسطه‌ی ارائه‌ی یک مدل»<sup>۱</sup> یا «برهان به واسطه‌ی تعبیر»<sup>۲</sup> نامید. همچنین برآیند روش اخیر برای تثبیت نتیجه‌ی منطقی مجموعه‌ای از جملات که در آن از مفهوم مدل بهره گرفته‌ایم را می‌توان «مفهوم مدل محور نتیجه‌ی منطقی» نامید و این روش را در نقطه‌ی مقابل «مفهوم برهان محور نتیجه‌ی منطقی» قرار داد که در آن از براهین قیاسی برای دستیابی به نتیجه‌ی منطقی مجموعه‌ای از جملات بهره می‌گیرند.

### ۶-۳. نتایج مؤثر این نوع صدق پژوهی

اکنون پس از طراحی و پیشنهاد مدلی برای صدق جملات یک دستگاه قیاسی که بر

<sup>۱</sup> method of proof by exhibiting a model

<sup>۲</sup> method of proof by interpretation

نامگذاری مورد نظر تارسکی را در اینجا ببینید:

Tarski, A., *Introduction to Logic and to the Methodology of the Deductive Sciences*, p. 116.

اساس ایده‌ی تارسکی در باب مفهوم توسعه یافته‌ی نتیجه‌ی منطقی بنا شده است، می‌خواهیم به برخی از توابع و برآیندهای مثبت این نوع صدق پژوهی بپردازیم.

۱. رهایی از انحصار روش‌های قیاسی در دستگاه‌های اصل موضوعی ریاضیات و منطق.

۲. دستیابی به یک شیوه‌ی استنتاجی کارآمد که به جای انحصار به استنتاج قیاسی، مبتنی است بر خطاناپذیری، یعنی هر روش استنتاجی دیگری که مقدمات صادق را به نتیجه‌های صادق می‌رساند، در دایره‌ی این مفهوم وارد شود.<sup>۱</sup>

۳. سازگاری معناشناختی با صدق پژوهی عمومی تارسکی. اگر نگاه تارسکی به مفهوم نتیجه‌ی منطقی را به عنوان یکی از مفاهیم مهم و کلیدی در شکل‌گیری و توسعه‌ی سیستم‌های صوری خوب بکاربیم، آن را مفهومی معناشناسانه خواهیم یافت. دلیل این مدعا هم این است که مفهوم مدل، به عنوان عنصر درونی تعریف توسعه یافته‌ی نتیجه‌ی منطقی، یک مفهوم معناشناختی است که آن هم به نوبه‌ی خود بر اساس مفهوم معناشناختی اصیلی مانند مفهوم ارضاء شکل گرفته است.<sup>۲</sup>

۴. گشوده شدن راهی برای پشت سر گذاشتن تمیز ناپذیری گودل. مقاله‌ی پر سر و صدای سال ۱۹۳۱ گودل درباره‌ی گزاره‌های ریاضی‌ای که به لحاظ صوری تمیز ناپذیر هستند واجد دو جنبه‌ی مهم بود. یکی اینکه روش اصل موضوعی محدودیت‌های ذاتی‌ای دارد که موجب می‌شود نتوان بسیاری از شاخه‌های ریاضی را به طور کامل به شکل اصل موضوعی درآورد. دوم اینکه اثبات سازگاری درونی مجموعه‌های بزرگ از دستگاه‌های قیاسی اصل موضوعی غیرممکن است.<sup>۳</sup> اکنون به نظر می‌رسد که شیوه‌ی پیشنهادی ما برای تثبیت برهانی (برهان به واسطه‌ی تعبیر) قضایای صادق، اما اثبات ناشده‌ی یک دستگاه اصل موضوعی که بر پایه‌ی تعریف

<sup>۱</sup> برای مشاهده‌ی اصل مدعیات تارسکی در این زمینه نک:

Tarski, A., "On the Concept of Logical Consequence", pp. 410-411.

<sup>۲</sup> برای تصدیق این مدعای نگارنده نک:

Tarski, A., "On the Concept of Logical Consequence", p. 415.

<sup>۳</sup> نک: ناگل، ارنست، جیمز نیومن و آلفرد تارسکی، برهان گودل و حقیقت و برهان، ص ۱۹.

توسعه یافته‌ی تارسکی از «نتیجه‌ی منطقی» بنا شده است، محمل مناسبی برای دور زدن و پرهیز از ابتلا به نتیجه‌ی نامطلوب قضیه‌ی گودل برای دستگاه‌های قیاسی اصل موضوعی و پشت سر گذاشتن آن است. البته این تذکر در حد گشایش یک پرسش پژوهشی است، نه نتیجه‌ای تثبیت یافته؛ لذا محتاج بررسی و تفصیل بیشتری است.

تنها، نکته در اختلاف برداشت گودل و تارسکی از مفهوم اثبات و برهان است. در حقیقت تارسکی پس از توسعه‌ی مفهوم نتیجه‌ی منطقی راه جدیدی برای توسعه‌ی روش‌های استنتاجی دستگاه گشوده است؛ فقط اینکه دیگر تمام استنتاج‌های دستگاه، دایره مدار استنتاج‌های قیاسی نمانده، بلکه وسیع‌تر شده است. یعنی تارسکی به تعریف جدیدی از استنتاج منطقی رسیده است که بر پایه‌ی آن به نحوی می‌توان تمام جملات صورت‌بندی شده‌ی دستگاه اصل موضوعی را جملاتی بنا شده و استنتاج شده بر پایه‌ی اصول موضوع آن به حساب آورد.

#### ۶-۴. چند نقد مقدر و یک پرسش پژوهشی گشوده

اما تمام نکات مثبت گفته شده در باب صدق‌نگاری مبتنی بر مفهوم توسعه یافته‌ی نتیجه‌ی منطقی، فقط نمایی از یک روی سکه است. در اینجا می‌خواهم برخی نتایج نامتناسب و تناقض‌آمیز ناشی از تن دادن به تعریف پیشنهادی خود در باب صدق جمله‌های دستگاه‌های قیاسی و هر تعریفی از این سنخ را نیز برشمارم. در میان این نتایج، نکاتی وجود دارند که صرفاً نامطلوب تلقی می‌شوند و لطمه‌ای به اصل پروژه‌ی صدق‌نگاری علوم قیاسی ما وارد نمی‌کنند، اما برخی نتایج ناشی از صدق‌نگاری معناشناختی علوم قیاسی هم وجود دارند که اعمال آنها در مورد علوم و نظریه‌های قیاسی، یا اصل این علوم و روش‌مندی آنها را تهدید می‌کند یا اینکه به تناقض‌ها و پارادوکس‌هایی غیر قابل اغماض منجر می‌شوند. لذا یا باید این تناقض‌ها و ناسازگاری‌های مفهومی را نادیده بگیریم که این امر به قیمت دست کشیدن از ساماندهی ریاضیات و منطق در قالب علوم و نظریه‌های قیاسی تمام می‌شود، یا اینکه باید با تن دادن به مرزهای میان نحو و معناشناسی، در پی تعیین تکلیف صدق

قضایای علوم قیاسی از راه‌های غیرمعناشناسانه باشیم. این پرسش گشوده‌ای است که هنوز پیش روی این مقاله است. نیز این پرسش که چگونه می‌توان تعریفی از صدق جمله‌های علوم قیاسی عرضه کرد یا چگونه می‌توان تعریف پیشنهادی ما را تعدیل کرد که هم سرشت معناشناسانه داشته باشد و هم از برخی نتایج نامطلوب پیش آمده به دور باشد؟

۱. اصل موضوعی، نه قیاسی. اولین نتیجه‌ی به کارگیری روش مبتنی بر مفهوم توسعه یافته‌ی نتیجه‌ی منطقی برای صدق‌نگاری دسته‌ی سوم جملات یک دستگاه قیاسی این است که به محض پذیرش این الگو باید در بحث پیشین خود مبنی بر قیاسی خواندن دستگاه‌های اصل موضوعی تجدید نظر کنیم و دیگر نمی‌توان با قاطعیت سابق، این قبیل دستگاه‌ها را به اعتبار روش تأسیس آنها قیاسی نامید. چون مفهوم توسعه یافته‌ی نتیجه‌ی منطقی، مرزهای استنتاج قیاسی را پشت سر می‌گذارد و باید از این ادعا که تمام جملات دستگاه دارای رابطه‌ای صرفاً قیاسی با مقدمات دستگاه و اصول موضوع آن

هستند، دست برداریم.

۲. صدق، استقراء و ابطال‌پذیری ریاضی. وقتی در تعریف توسعه یافته‌ی مفهوم نتیجه‌ی منطقی می‌گوییم:

جمله‌ی  $x$  نتیجه‌ی منطقی جمله‌های دسته‌ی  $k$  است، اگر و فقط اگر هر مدل از دسته‌ی  $k$  مدلی از جمله‌ی  $x$  نیز باشد؛

این تعریف، سرشتی ابطال‌پذیرانه (البته از نوع ریاضی آن) و استقرایی دارد. مسلّم است که برای اثبات نتیجه‌ی منطقی بودن جمله‌ی  $x$  نمی‌توان تمام مدل‌های ممکن برای دسته‌ی  $k$  را برشمرد و در مورد آنها تحقیق کرد که آیا هر مدل از جمله‌های دسته‌ی  $k$  مدلی از جمله‌ی  $x$  هم هست یا نه. یعنی رابطه‌ی نتیجه‌ی منطقی با مجموعه مقدمات آن تا زمانی برقرار است که این رابطه با یافتن یک نمونه‌ی خلاف، ابطال نشده باشد. یعنی پس از یافتن تعدادی نمونه مدل، که هم مدلهایی برای مجموعه‌ی  $k$  باشند و هم مدلهایی برای جمله‌ی  $x$ ، تا وقتی می‌توان گفت  $x$

نتیجه‌ی منطقی مجموعه جملات  $k$  است که نمونه‌ی خلاف یا مدلی برای مجموعه جملات  $k$  یافت نشده باشد، که مدلی از جمله‌ی  $X$  نباشد. همین ماجرا به تعریف صدق پیشنهادی ما که مبتنی بر تعریف توسعه یافته‌ی تارسکی از نتیجه‌ی منطقی است، سرایت خواهد کرد. نفس ابطال‌پذیری هم با سرشت دائمی و ضروری احکام و نتایج ریاضی ناسازگار است.

۳. /از میان رفتن بی‌طرفی معرفت‌شناختی. تارسکی در یکی از بخش‌های مقاله‌ی مفهوم معناشناختی صدق و مبانی معناشناسی، در بیان استقلال رویکرد خود در تعریف معناشناختی صدق از گرایش‌های معرفتی مختلف، معتقد است که «می‌توانیم تصوّر معناشناختی صدق را بپذیریم بدون آنکه گرایش معرفت‌شناختی احتمالی خود را رها کنیم؛ می‌توانیم واقع‌گرای ساده، واقع‌گرا یا ایده‌الیست انتقادی، تجربه‌گرا یا متافیزیسین و خلاصه هر چه که تا پیش از این بوده‌ایم، باقی بمانیم. تصوّر معناشناختی [صدق] نسبت به همه‌ی این مباحث، کاملاً خنثی است.»<sup>۱</sup> او چنین موضع‌گیری‌ای را هم در باب رهیافت قیاسی به شاخه‌های ریاضیات دارد. او در صفحات ابتدایی مقاله‌ی خود با عنوان «مفاهیم بنیادی روش‌شناسی علوم قیاسی» به صراحت اعلام می‌دارد که هیچ دیدگاه فلسفی خاصی در باب مبانی ریاضیات پیش‌فرض تحقیقات او در باب علوم قیاسی قرار نگرفته است.<sup>۲</sup>

اما صدق‌نگاری پیشنهادی ما که بر پایه‌ی مفهوم نتیجه‌ی منطقی تارسکی یعنی از درون آراء خود تارسکی استخراج شده، الزاماً در برابر موضع معرفت‌شناختی ما لاقضاء نیست. نمی‌توان آن‌طور که تارسکی می‌گوید، مفهوم معناشناختی صدق او را به خصوص در باب علوم و نظریه‌های قیاسی یعنی همان منطق و ریاضیات پذیرفت و در عین حال هر موضع معرفتی‌ای اتخاذ کرد؛ مثلاً دیدیم که روش پیشنهادی ما برای تشخیص صدق مبتنی بر مفهوم نتیجه‌ی منطقی، روشی

---

<sup>1</sup> Tarski, A., "The Semantic Conception of Truth and the Foundations of Semantics", p. 362.

<sup>2</sup> Tarski, A., "Fundamental Concepts of the Methodology of the Deductive Sciences", p. 62.

ابطال‌پذیرانه است. این امر بدان معناست که حداقل یک موضع معرفتی خاص وجود دارد که با این ابطال‌پذیری و لذا با صدق‌نگاری پیشنهادی ما که برآمده از دل اندیشه‌های تارسکی است، ناسازگار است و آن هم افلاطون‌گرایی ریاضی است. چون نزد آنها «ساختارهای ریاضی هویتی مجرد هستند که مستقل از ذهن ما وجود دارند و عمل ریاضی‌دان کشف آنهاست، نه ابداع و یا خلق آنها.»<sup>۱</sup> این در حالی است که فحوای درونی تمام رویکردهای ابطال‌پذیرانه، با مفهوم کشف مندرج در افلاطون‌گرایی ریاضی ناسازگار است. مهمترین خصیصه‌ی این حقایق ریاضی کشف شده، صدق همیشگی و دائمی آنهاست که این خصیصه‌ی ضروری در امور و جمله‌هایی که در چارچوب اصل موضوعی خاص، آن هم با رویکرد ابطال‌پذیرانه صادق پنداشته می‌شوند، وجود ندارد. لذا این نقد مطرح است که الزاماً این گفته‌ی تارسکی که می‌توان الگوی صدق معناشناختی او را با حفظ هر گرایش معرفت‌شناختی‌ای اتخاذ کرد با طرح پیشنهادی ما در باب صدق علوم قیاسی قابل جمع نیست.

### نتیجه

پس از ایضاح برخی مفاهیم کلیدی این مقاله، به اینجا رسیدیم که پرسش از صدق مطابقی و معناشناختی جمله‌ها و قضایای شکل گرفته در علوم قیاسی، پرسشی است معنادار و موضوعیت‌دار که در اثر اتخاذ رویکرد تارسکی در باب دانش معناشناسی، رسمیت یافته است. از طرفی در مراحل تأسیس یک دستگاه قیاسی هم دیدیم که مفهوم اثبات‌پذیری و گوهر درونی آن یعنی مفهوم برهان را نمی‌توان جایگزین کافی و مناسبی برای مفهوم صدق دانست.

در این پژوهش توانسته‌ایم پس از آزمودن چند روش، با دستمایه قرار دادن تقریر خاص و البته توسعه یافته‌ی تارسکی از مفهوم «نتیجه‌ی منطقی»، طرحی برای تعریف صدق جمله‌های و قضایای شکل گرفته در این دسته از علوم و نظریه‌ها عرضه

<sup>۱</sup> بینای مطلق، محمود، نظم و راز، ص ۱۵۵.



کنیم که در عین حال با دغدغه‌های معناشناسانه‌ی تارسکی هم سازگار افتد. تعریف پیشنهادی این مقاله درست در نقطه‌ی مقابل تقریر برهان محوری است که پیشینیان تارسکی در مواجهه با دستگاه‌های نظری قیاسی و اصل موضوعی عرضه می‌کردند و لذا یا نسبت به صدق قضایای این علوم بی‌اعتنا بودند یا آن را به مثابه‌ی مفهومی وابسته به اثبات‌پذیری عرضه می‌کردند؛ همچنین مشکلات پیش روی این تقریر و عدم کفایت آن را در پوشش دادن صدق تمام جمله‌های علوم قیاسی بررسی کردیم.

## منابع

۱. احمدی، علی اکبر، *نظریه صدق تارسکی*. تبریز، مؤسسه تحقیقاتی علوم اسلامی و انسانی دانشگاه تبریز (سه علامه تبریزی)، ۱۳۸۲.
۲. بینای مطلق، محمود، *نظم و راز*، چ ۱، تهران، هرمس، ۱۳۸۵.
۳. بهنیافر، مهدی، *تعبیر صدق در علوم قیاسی بر اساس نظریه صدق تارسکی*، رساله دکتری، تهران، دانشگاه آزاد علوم و تحقیقات، بهمن ۱۳۸۸.
۴. تارسکی، الفرد، *مقدمه للمنطق و المنهج البحث فی العلوم الاستدلالية*، ترجمه‌ی عزمی اسلام، القا، هیئته المصریة العامه للتألیف و النشر، ۱۹۷۰.
۵. موحد، ضیاء، *درآمدی به منطق جدید*، چاپ چهارم، تهران، علمی و فرهنگی، ۱۳۸۰.
۶. ناگل، ارنست، *جیمز نیومن و آلفرد تارسکی، برهان گودل و حقیقت و برهان*، ترجمه‌ی محمد اردشیر، تهران، مولی، ۱۳۶۴.
۷. هاک، سوزان، *فلسفه منطق*، ترجمه‌ی محمدعلی حجتی، قم، کتاب طه، ۱۳۸۲.
۸. وحید، حمید، "گرایش‌های موجود در فلسفه ریاضیات"، *ریاضی*، سال دهم، شماره ۲، ۱۳۷۸ صص ۲۰-۷.
9. Beall, J. C., "Truth and Paradox, a Philosophical Sketch," *Philosophy of Logic (Handbook of the Philosophy of Science)*, Ed. Dale Jacquette, Dov M. Gabbay, Paul Thagard, and John Woods, 1st ed., Chapel Hill, North Holland, 2006, pp. 324-410.
10. Czelakowski, J., & Grzegorz Malinowski, "Key Notions of Tarski's Methodology of Deductive Systems", *Studia Logica: An International Journal for Symbolic Logic*, 44.4 (1985), pp.321-51.

11. Detlefsen, M., "Formalism", in: *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic (Oxford Handbooks)*, Ed. Stewart Shapiro, New York, Oxford University Press, USA, 2007, pp. 236-355.
12. Hodges, W., "Model Theory," in: *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2001. Available at: <http://plato.stanford.edu/entries/model-theory/>, 2009.
13. Jacquette, D., "On the Relation of Informal to Symbolic Logic," in: *Philosophy of Logic (Handbook of the Philosophy of Science)*, Ed. Dale Jacquette, Dov M. Gabbay, Paul Thagard, and John Woods, 1st ed, Chapel Hill, North Holland, 2006. pp.130-54.
14. Nolt, J., "Free Logics", in: *Philosophy of Logic (Handbook of the Philosophy of Science)*, Ed. Dale Jacquette, Dov M. Gabbay, Paul Thagard, and John Woods. 1st ed. Chapel Hill, North Holland, 2006. pp. 1023-1060.
15. Tarski, A., "Fundamental Concepts of the Methodology of the Deductive Sciences", *Logic, Semantics, Metamathematics (papers from 1923 to 1938)*, Trans. J. H. Woodger. first ed. Oxford, Clarendon Press (1956), pp. 60-109.
16. Tarski, A., "On the Concept of Logical Consequence", *Logic, Semantics, Metamathematics (papers from 1923 to 1938)*, Trans., by J. H. Woodger, 1st ed, Oxford, Clarendon Press, (1956), pp.409-20.
17. Tarski, A., "The Semantic Conception of Truth and the Foundations of Semantics," in: *Philosophy and Phenomenological Research* 4.3, (1944), pp. 76- 341.
18. Tarski, A., *Introduction to Logic and to the Methodology of the Deductive Sciences*, ed. Jan Tarski, Trans., by Olaf Helmer, 4th ed. New York, Oxford University Press, 1994.